# Одномерная модель Изинга

# Гамильтониан модели Изинга

$$\mathbf{H} = -\sum_{i} h_i \sigma_i - \sum_{i,j} J_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$

$\boldsymbol{i, j}$ - индексы, нумерующие узды кристаллической решетки;

$\sigma_i = \pm 1$ - дискретная переменная, принимающая значения $\pm 1$;

$h_i = \mu_i H$, $\mu_i$ - магнетоны и $H$ - магнитное поле в узлах;

$J_{i,j}$ - энергии взаимодействия между спинами в узлах с номерами *i* и *j;*

# Историческая справка

Эрнст Изинг (1900-1998)

Вильгельм Ленц
(1888-1957)

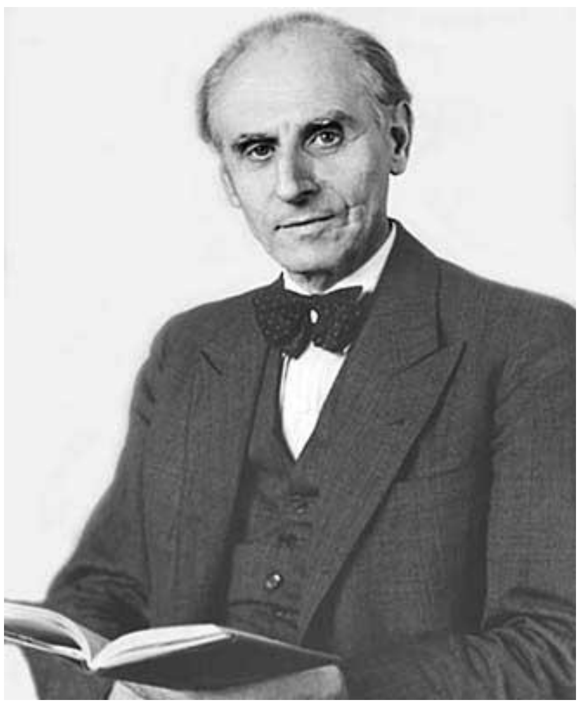
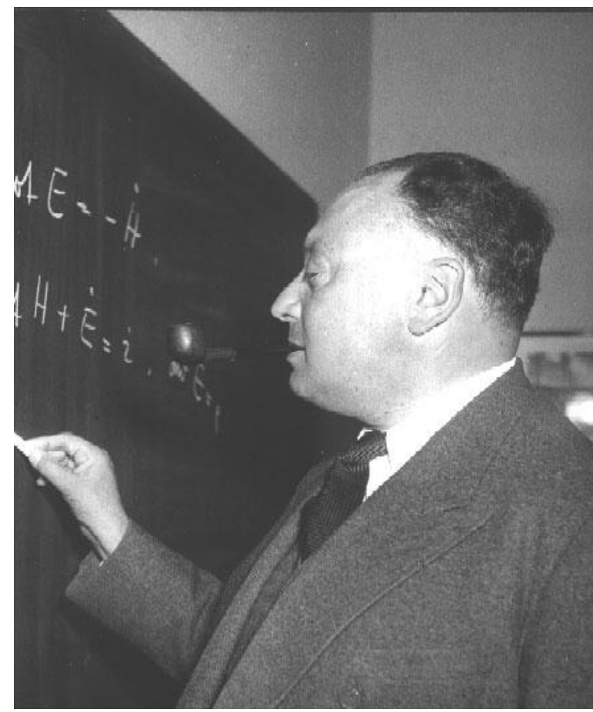


Фото приблизительно 1925 г.

Вольфганг Паули
(1900-1958).



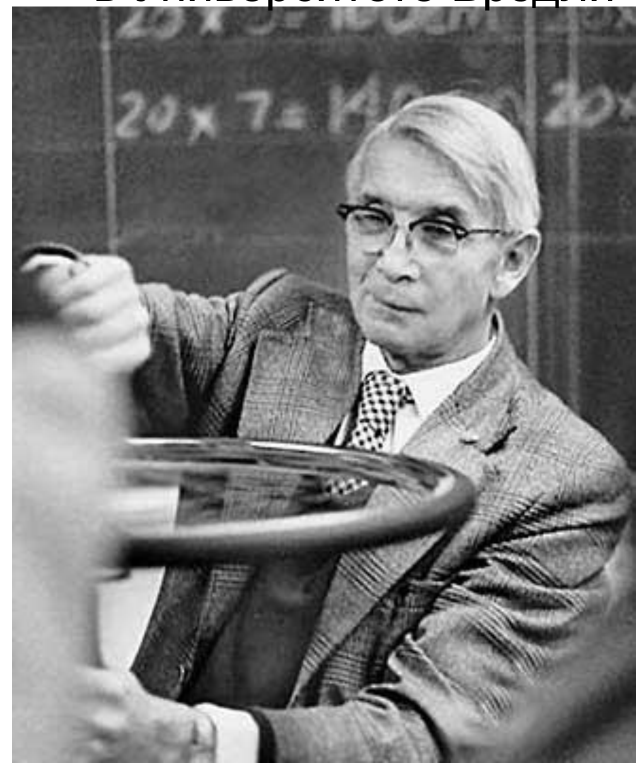
## Все публикации Э.Изинга

1. **E. ISING**, *Beitrag zur Theorie des Ferro- und Paramagnetismus Dissertation*, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Hamburgischen Universität Hamburg, 1924 ( unpublished)

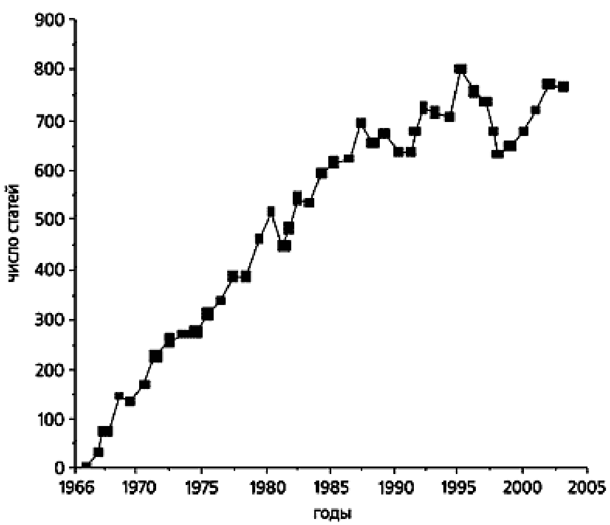
2. **E. ISING**, *Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus,* Zeitschrift fűr Physik 31 (1925) 253-258.

3. **E. ISING**, Goethe as a Physicist American Journal of Physics 18 (1950) 235-236.

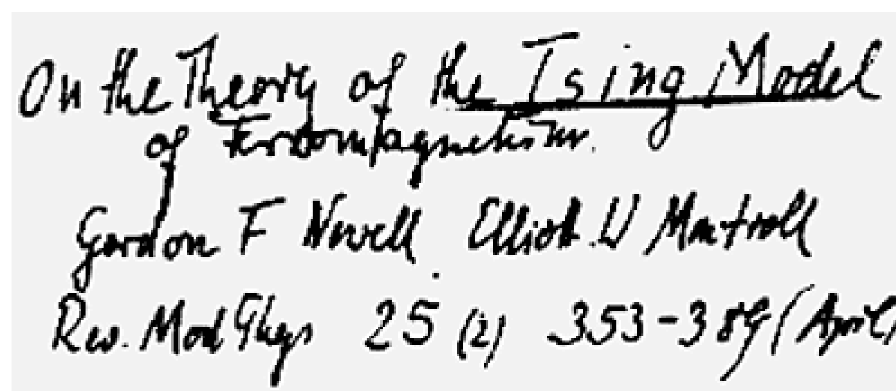
Э.Изинг читает лекцию в Университете Брэдли




Количество публикаций со ссылкой на работу Изинга [2] 1925 .




Заметка в записной книжке Изинга



## Однородная «замкнутая» изинговская цепочка со взаимодействием ближайших соседей при отсутствии внешнего магнитного поля

$$\mathbf{H} = -J\left(\sum_{n=1}^{N-1}\sigma_n\sigma_{n+1} + \sigma_N\sigma_1\right) = -J\sum_{n=1}^{N}\tau_n, \quad \tau_n = \sigma_n\sigma_{n+1} = \pm 1$$

<u>Статистическая сумма</u>

$$Z_N = Tre^{-\beta\mathbf{H}}, \quad \beta = \frac{1}{T}.$$

Символ $Tr$ - обозначает сумму диагональных элементов матрицы.

$$Z_N = \sum_{\tau_1=\pm 1}\sum_{\tau_2=\pm 1}\dots\sum_{\tau_N=\pm 1}\exp(\beta J\tau_n) = \prod_{n=1}^{N}\left(e^{\beta J} + e^{-\beta J}\right) = \prod_{n=1}^{N}2ch(\beta J);$$

$$Z_N = \left[2ch(\beta J)\right]^N$$

## Однородная «открытая» изинговская цепочка со взаимодействием ближайших соседей при отсутствии внешнего магнитного поля

$$\mathbf{H} = -J\sum_{n=1}^{N-1}\sigma_n\sigma_{n+1} = -J\sum_{n=1}^{N-1}\tau_n$$

$$Z_N = \sum_{\{\tau_1=\pm1,..\tau_{N-2}=\pm1\}} \exp(\beta J\tau_n)\exp(\beta J\tau_{N-1}) = 2ch\left(\beta J\right)Z_{N-1};$$

Рекуррентное соотношение для вычисления статистической суммы:

$$Z_N = 2ch\left(\beta J\right)Z_{N-1}; \quad Z_2 = 4ch\left(\beta J\right)$$ - начальное условие

$$Z_N = 2^N\left[ch(\beta J)\right]^{N-1}$$

**Свободная энергия в расчёте на один спин в термодинамическом пределе N → ∞ аналитична при всех <u>T > 0</u>, поэтому в данной модели <u>нет фазового перехода.</u>**

$$f(T) = -T \lim_{N\to\infty} \frac{\ln Z_N}{N} = -T \ln\left[2ch\left(\frac{J}{T}\right)\right].$$

Выражение для свободной энергии очень напоминает формулу для независимых спинов, в которой магнитное поле $h$ заменено на $J$, т.е. вместо приложенного поля стоит константа обменного взаимодействия.

## Замкнутая изинговская цепочка со случайными взаимодействиями ближайших соседей в продольном внешнем поле. Вычисление статистической суммы методом трансфер-матрицы.

$$\mathbf{H} = -\sum_{n=1}^{N} h_n \sigma_n - \sum_{n=1}^{N} J_n \sigma_n \sigma_{n+1}, \qquad (\sigma_n = \pm 1)$$

Введем множители Больцмана $V_\mathrm{n}$

$$V_n = \exp\left[ \beta J_n \sigma_n \sigma_{n+1} + \frac{1}{2} \beta (h_n \sigma_n + h_{n+1} \sigma_{n+1}) \right]$$

Больцмановские множители $V_\mathrm{n}$ можно рассматривать, как матрицы 2 x 2

$$V_n \to V\left(\sigma_n; \sigma_{n+1}\right)$$

# Каждый элемент матрицы Vn принимает вид

| | |
|---|---|
| $\sigma_n = +1; \quad \sigma_{n+1} = +1$ | $\sigma_n = +1; \quad \sigma_{n+1} = -1$ |
| $\exp\left[\beta J_n + \frac{1}{2}\beta(h_n + h_{n+1})\right]$ | $\exp\left[-\beta J_n + \frac{1}{2}\beta(h_n - h_{n+1})\right]$ |
| $\exp\left[-\beta J_n - \frac{1}{2}\beta(h_n - h_{n+1})\right]$ | $\exp\left[\beta J_n - \frac{1}{2}\beta(h_n + h_{n+1})\right]$ |
| $\sigma_n = -1; \quad \sigma_{n+1} = +1$ | $\sigma_n = -1; \quad \sigma_{n+1} = -1$ |

$\sigma_n$ – номер строки, $\sigma_{n+1}$ – номер столбца

# Вычисление произведения матриц

$$Z_N = Tr\{\hat{V}_1 \cdot \hat{V}_2 \ldots \hat{V}_n \cdot \hat{V}_{n+1} \ldots \hat{V}_N\} = Tr\{\hat{U}(\sigma_1;\sigma_N)\}$$

$$V_n(\sigma_n;\sigma_{n+1}) = \begin{pmatrix} \exp\left[\beta J_n + \frac{1}{2}\beta(h_n + h_{n+1})\right]; & \exp\left[-\beta J_n + \frac{1}{2}\beta(h_n - h_{n+1})\right] \\ \exp\left[-\beta J_n + \frac{1}{2}\beta(-h_n + h_{n+1})\right]; & \exp\left[\beta J_n - \frac{1}{2}\beta(h_n + h_{n+1})\right] \end{pmatrix}$$

Результирующая трансфер-матрица $\hat{U}(\sigma_1;\sigma_N)$ есть матрица 2x2.

След матрицы – сумма ее диагональных элементов. Если матрица диагональна, то по главной диагонали стоят ее собственные значения.

*Пусть все $h_n = h$, все $J_n = J$ и цепочка замкнута в кольцо* (циклические граничные условия)

# Трансфер-матрица для однородной цепочки Изинга, замкнутой в кольцо

$$\hat{V}_1 = \hat{V}_2 = \ldots = \hat{V}_N = \hat{V}; \quad \hat{V}_{N+1} = \hat{V}_1; \quad Z_N = Tr\hat{U} = Tr\hat{V}^N.$$

След матрицы $U$ равен $Z_N = \lambda_+^N + \lambda_-^N$,

где $\lambda_\pm$ - два собственных значения матрицы $V$, которые мы находим их обычным путем:

$$Det\begin{pmatrix} \exp\left[\beta J + \beta h\right] - \lambda & \exp\left[-\beta J\right] \\ \exp\left[-\beta J\right] & \exp\left[\beta J - \beta h\right] - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2(e^{\beta J} ch\beta h)\lambda + 2sh(2\beta J) = 0$$

# Статистическая сумма для однородной цепочки в термодинамическом пределе

$$\lambda_{\pm} = e^{\beta J} ch\beta h \pm \left( e^{2\beta J} sh^2 \beta h + e^{-2\beta J} \right)^{1/2}$$

$$Z_N = \lambda_+^N + \lambda_-^N = \lambda_+^N \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^N \right]$$

**В термодинамическом пределе N → ∞ статистическая сумма определяется максимальным собственным значением трансфер-матрицы**

$$Z_N = \lim_{N \to \infty} \left\{ \lambda_+^N \left[ 1 + \left( \lambda_- / \lambda_+ \right)^N \right] \right\} = \lambda_+^N$$

# Вычисление статистической суммы для однородной цепочки в с открытыми концами в продольном магнитном поле без использования трансфер-матрицы

.

$$\mathbf{H} = -\mu H \sum_{n=1}^{N} \sigma_n^z - J \sum_{n=1}^{N-1} \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z$$

$$Z_N = \sum_{\{\sigma_1,...\sigma_{N-1}=\pm1\}} \exp\left[-\beta \mathbf{H}\left(\sigma_1,...,\sigma_N\right)\right]; \quad \zeta_N = \sum_{\{\sigma_1,...\sigma_{N-1}=\pm1\}} \sigma_N \exp\left[-\beta \mathbf{H}\left(\sigma_1,...,\sigma_N\right)\right]$$

Найдем рекуррентные соотношения для $Z_N, \zeta_N$ и $Z_{N-1}, \zeta_{N-1}$:

$$Z_N = \sum_{\{\sigma_1,...\sigma_{N-1}=\pm1\}} \exp\left[-\beta \mathbf{H}\left(\sigma_1^z,...,\sigma_{N-1}^z\right)\right] \sum_{\sigma_N=\pm1} \exp\left(\alpha \sigma_{N-1}^z \sigma_N^z + \gamma \sigma_N^z\right) =$$

$$\sum_{\{\sigma_1,...\sigma_{N-1}=\pm1\}} \exp\left[-\beta \mathbf{H}\left(\sigma_1,...,\sigma_{N-1}\right)\right] 2ch\left(\alpha \sigma_{N-1}^z + \gamma\right) =$$

$$2\left(ch\alpha\, ch\gamma\right) \cdot Z_{N-1} + 2\left(sh\alpha\, sh\gamma\right) \cdot \zeta_{N-1};$$

$$ch\left(\alpha \sigma_N + \gamma\right) = \left(ch\alpha\, ch\gamma\right) + \left(sh\alpha\, sh\gamma\right) \cdot \sigma_N; \quad \alpha = \beta J; \quad \gamma = \beta \mu H$$

$$\zeta_N = \sum_{\{\sigma_1,\ldots\sigma_{N-1}=\pm1\}} \exp\left[-\beta \mathbf{H}\left(\sigma_1^z,\ldots,\sigma_N^z\right)\right] \sum_{\sigma_{N=-1}}^{1} \sigma_N^z \exp\left(\alpha\sigma_{N-1}^z\sigma_N^z + \gamma\sigma_N^z\right) =$$

$$\sum_{\{\sigma_1,\ldots\sigma_{N-1}=\pm1\}} \exp\left[-\beta \mathbf{H}\left(\sigma_1^z,\ldots,\sigma_N^z\right)\right] \sum_{\sigma_{N=-1}}^{1} 2sh\left(\alpha\sigma_N^z + \gamma\right) =$$

$$2\left(sh\alpha\, ch\gamma\right)\cdot \zeta_{N-1} + 2\left(ch\alpha\, sh\gamma\right)\cdot Z_{N-1};$$

$$sh\left(\alpha\sigma_N^z + \gamma\right) = \left(sh\alpha\, ch\gamma\right)\cdot \sigma_N + \left(ch\alpha\, sh\gamma\right);$$

Система уравнений в конечных разностях

$$\begin{cases} Z_N = 2\left(ch\alpha\, ch\gamma\right)\cdot Z_{N-1} + 2\left(sh\alpha\, sh\gamma\right)\cdot \zeta_{N-1}; \\ \zeta_N = 2\left(sh\alpha\, ch\gamma\right)\cdot \zeta_{N-1} + 2\left(ch\alpha\, sh\gamma\right)\cdot Z_{N-1}; \end{cases}$$

с граничными условиями $Z_1 = 2ch\gamma; \quad \zeta_1 = 2sh\gamma.$

Частное решение ищем в виде: $Z_N = Ax^N; \quad \zeta_N = Bx^N$

Общее решение имеет вид

$$\begin{cases} Z_N = A_1 x_1^N + A_2 x_2^N; \\ \zeta_N = \left( \dfrac{2ch\alpha\, ch\gamma - x_2}{x_1 - x_2} \right) A_1 x_1^N + \left( \dfrac{x_1 - 2ch\alpha\, ch\gamma}{x_1 - x_2} \right) A_2 x_2^N. \end{cases}$$

(Константы А $_1$ и А $_2$ найдем из граничных условий $Z_1 = 2ch\gamma; \quad \zeta_1 = 2sh\gamma$)

Статистическая сумма конечной открытой цепочки

$$Z_N = \left( ch\gamma + \frac{sh^2\gamma + e^{-2\alpha}}{\left(sh^2\gamma + e^{-4\alpha}\right)^{1/2}} \right) x_1^{N-1} + \left( ch\gamma - \frac{sh^2\gamma + e^{-2\alpha}}{\left(sh^2\gamma + e^{-4\alpha}\right)^{1/2}} \right) x_2^{N-1}$$

$$x_{1,2} = e^{\alpha} \left( ch\gamma \pm \sqrt{sh^2\gamma + e^{-4\alpha}} \right) = \lambda_{\pm}; \qquad \alpha = \beta J; \quad \gamma = \beta \mu H$$

# Основные термодинамические величины

Свободная энергия в расчете на один спин $$f=-\frac{1}{N}T\ln Z_N.$$

Намагниченность $$m=-\frac{\partial f}{\partial H}.$$

Магнитная восприимчивость $$\chi=\frac{\partial m}{\partial H}.$$

Внутренняя энергия $$E=f-T\frac{\partial f}{\partial T}=-T^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{f}{T}\right).$$

Теплоемкость $$C=\frac{\partial E}{\partial T}.$$

В термодинамическом пределе (N → ∞) свободная энергия и намагниченность однородной цепочки в расчете на один спин равны соответственно

$$f = -T\ln\lambda_+ = -J - T\ln\left[ch\frac{h}{T} + \sqrt{sh^2\frac{h}{T} + e^{-\frac{4J}{T}}}\right], \quad h = \mu H;$$

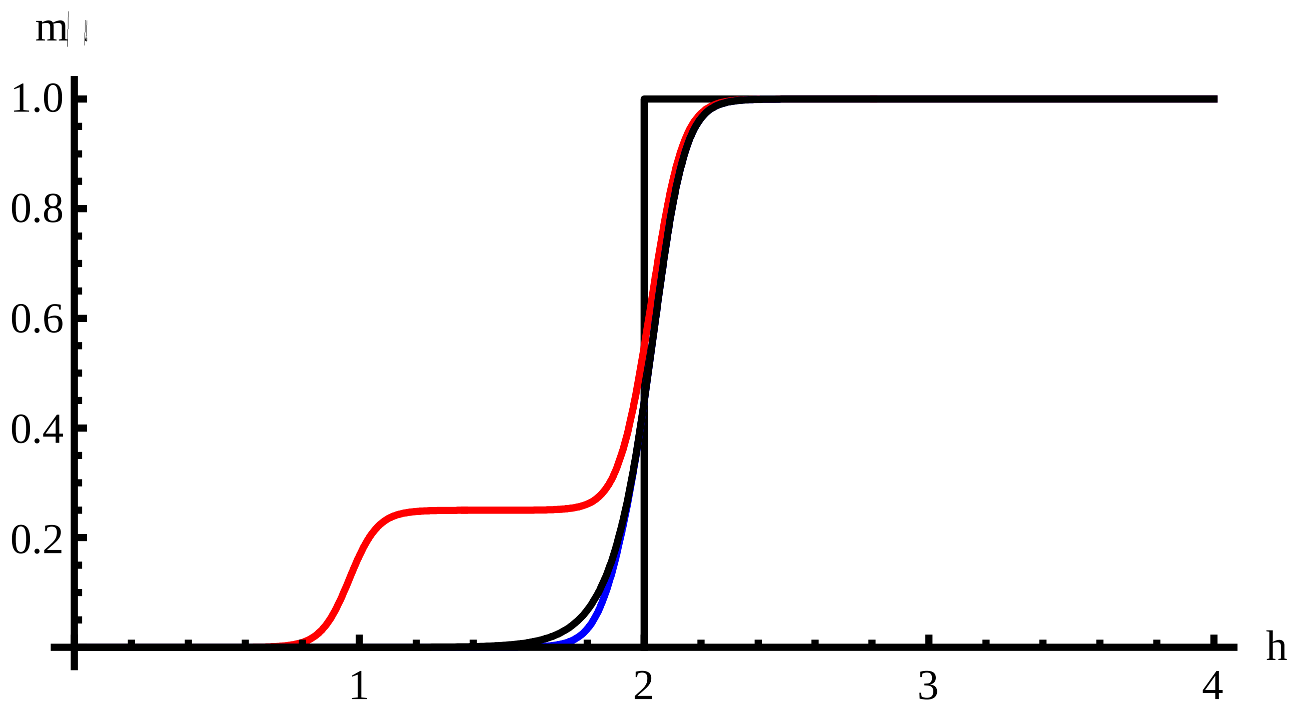
$$m = -\frac{\partial f}{\partial H} = \mu\frac{sh\dfrac{\mu H}{T}}{\sqrt{sh^2\dfrac{\mu H}{T} + e^{-\frac{4J}{T}}}};$$

Если $J < 0$ (АФ взаимодействие) при $T = 0$ имеет место квантовый фазовый переход первого рода по магнитному полю при $\mu H = 2|J|$

$$m \approx \frac{\mu}{\sqrt{1 + 4e^{-\frac{2(\mu H - 2|J|)}{T}}}} = \begin{cases} 0, \ \mu H < 2|J| \\ \mu, \ \mu H > 2|J| \end{cases};$$

# Изучение размерных эффектов: однородная конечная цепочка, замкнутая в кольцо, «открытая» цепочка и бесконечная цепочка

Полевая зависимость намагниченности при T=0.1 K, N=8, J=-4 K




«Открытой» цепочке – отвечает красная линия, замкнутой цепочке – синяя линия, бесконечной цепочке – черная линия. При T = 0 наблюдается квантовый фазовый переход первого рода – скачок намагниченности при $\mu H=2|J|$

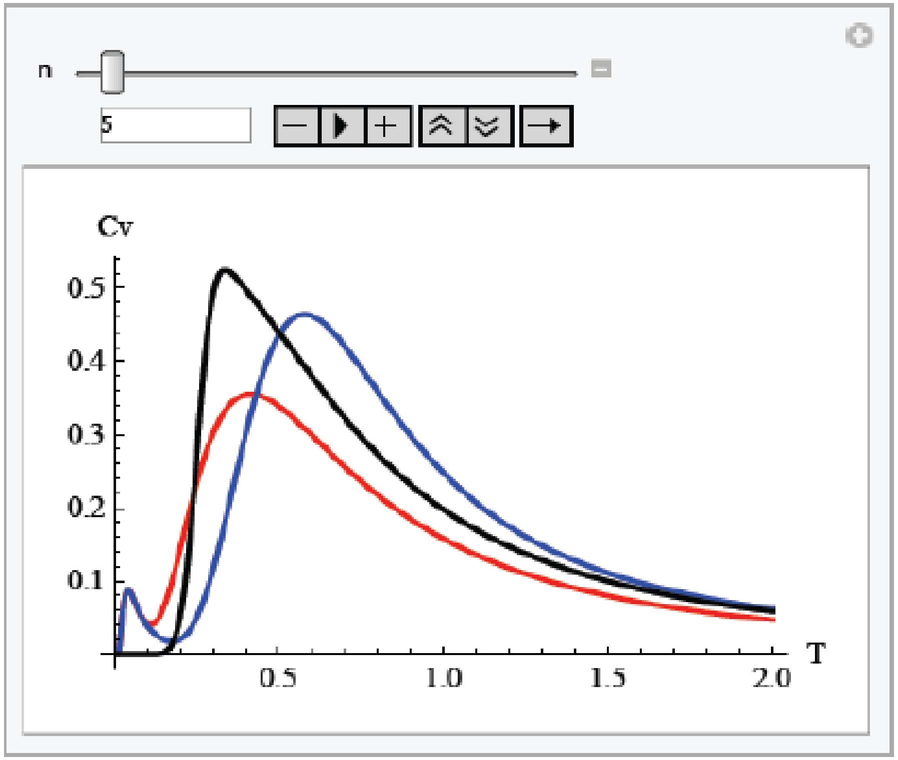
# Изучение размерных эффектов: однородная конечная цепочка, замкнутая в кольцо, «открытая» цепочка и бесконечная цепочка

## Температурная зависимость теплоемкости

**№ 4**

Temperature dependance of cpecific heat at h = 0.01  for Ising chain with J = 2

Out[5]=

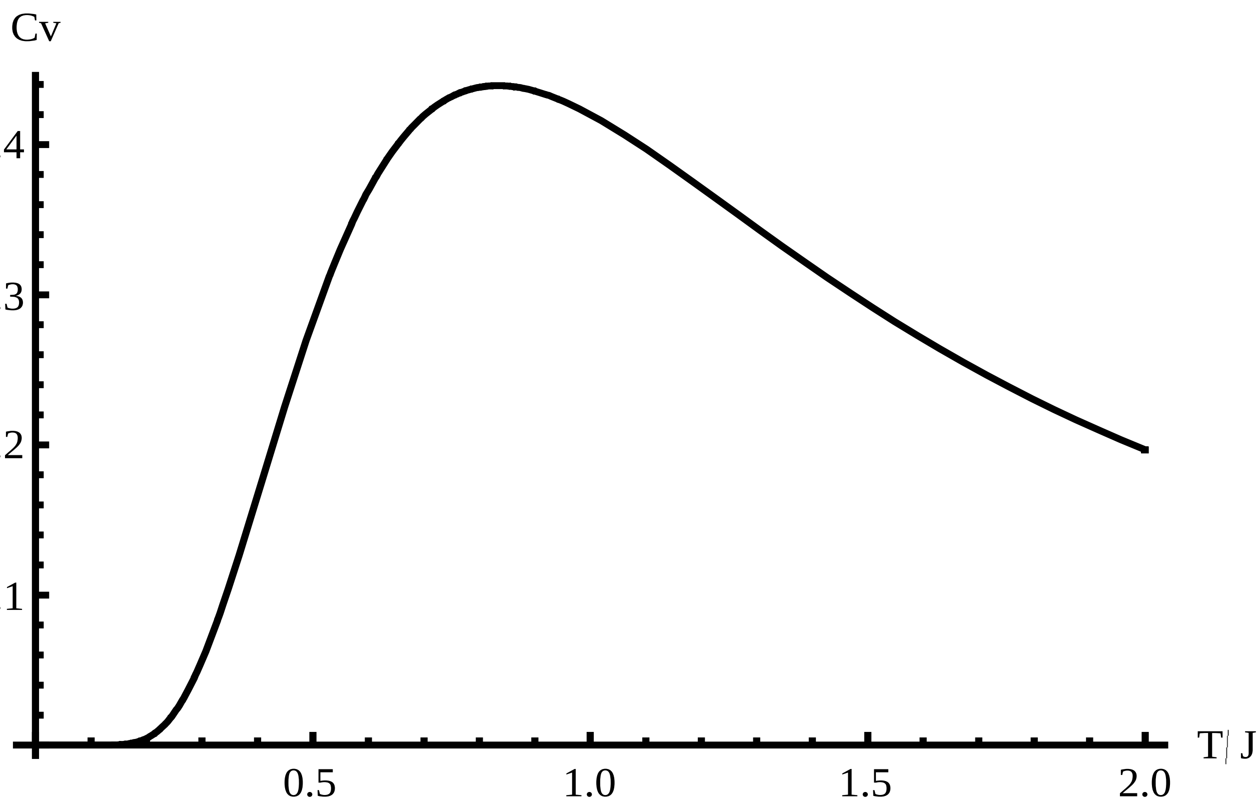



Line - red curve, ring - blue curve, Infinite chain - black curve

«Открытой» цепочке – отвечает красная линия, замкнутой цепочке – синяя линия, бесконечной цепочке – черная линия

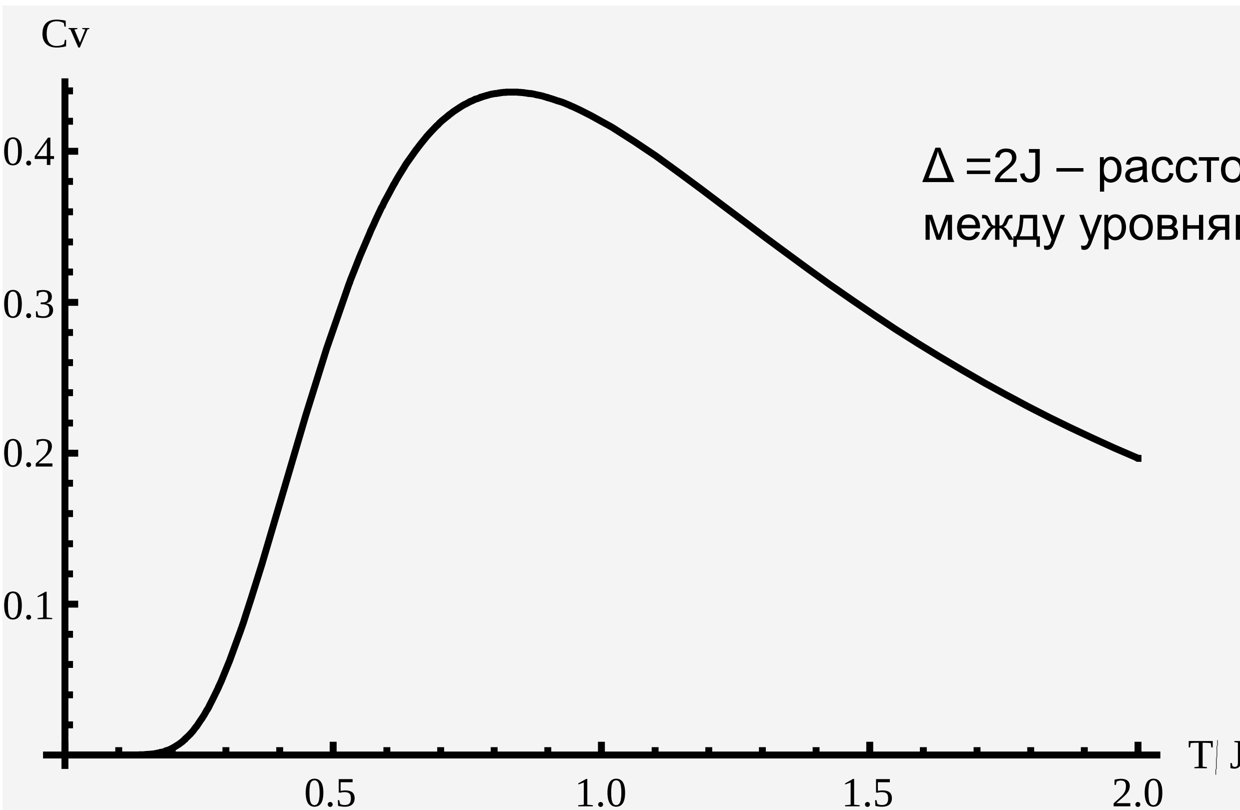
Внутренняя энергия и теплоемкость однородной бесконечной цепочки в нулевом магнитном поле

$$E = -J th\left(\frac{J}{T}\right); \qquad C = \left(\frac{J}{T}\right)^2 \frac{1}{ch^2\left(\frac{J}{T}\right)}.$$



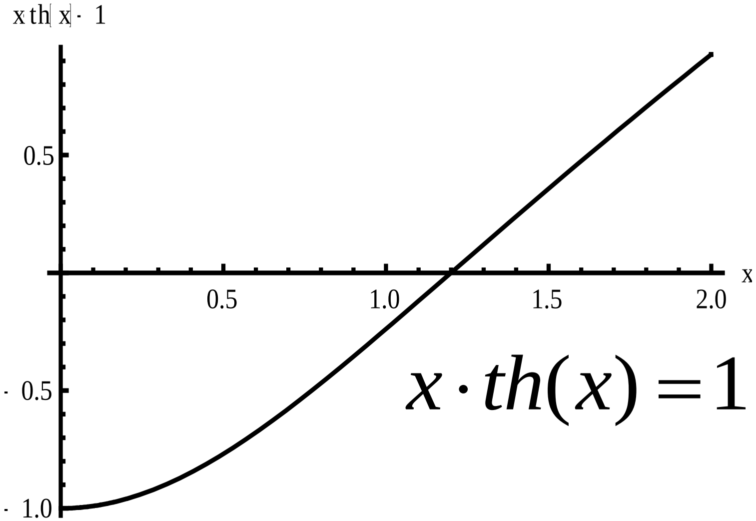
# Температурная зависимость теплоемкости двухуровневой системы. Аномалия Шоттки.

$$C_{\text{Schottky}} = R\left(\frac{\Delta}{T}\right)^2 \frac{e^{\Delta/T}}{[1+e^{\Delta/T}]^2}$$



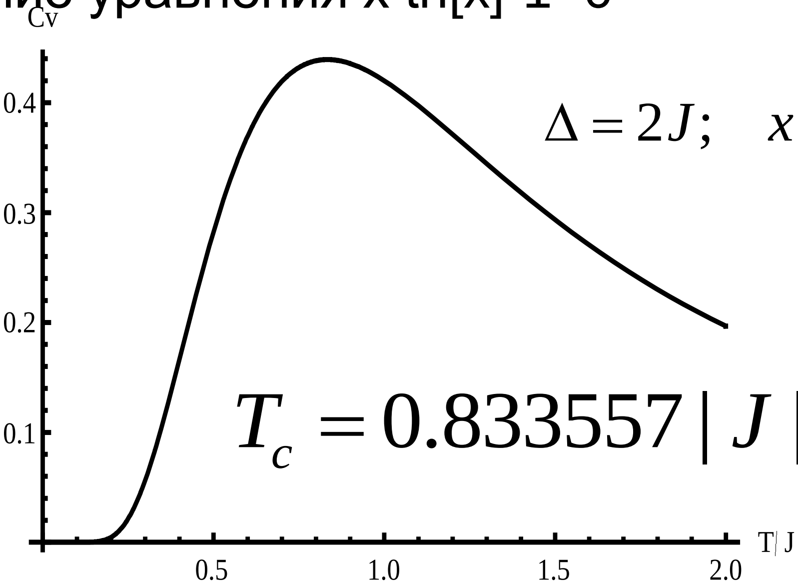

Δ =2J – расстояние между уровнями

# Графическое и численное решение уравнения x·th[x]-1=0




$$x \cdot th(x) = 1$$

$$x_c = 1.19968$$




$$\Delta = 2J; \quad x = \frac{J}{T}$$

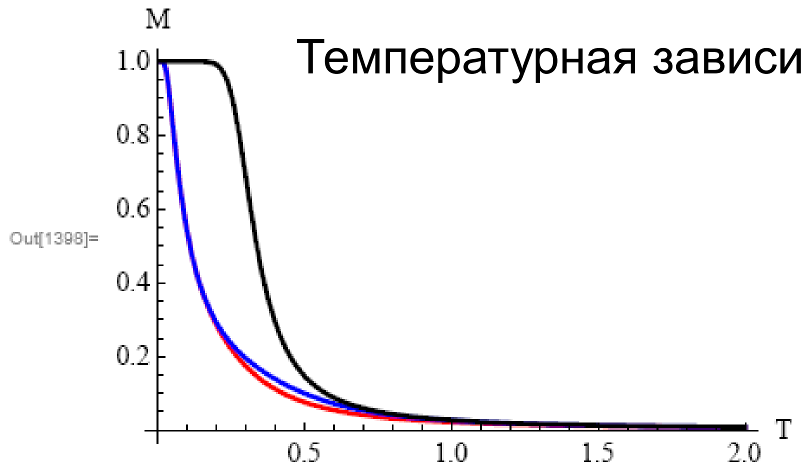
$$T_c = 0.833557\,|J|$$

In[21]:=

```
Clear[x, y]
cv = 1 / (t Cosh[1 / t]) ^2;
Plot[cv, {t, 0.001, 2}, AxesLabel → {"T/J", "Cv"},
 PlotStyle → {Thick, Black}, AxesStyle → Thick, BaseStyle → Medium]
y = x Tanh[x] - 1;
Print["Graphical solution of equation x·th[x]-1=0"]
Plot[y, {x, 0, 2}, AxesLabel → {"x", "x·th[x]-1"},
 PlotStyle → {Thick, Black}, AxesStyle → Thick, BaseStyle → Medium]
Print[]
xc = x /. FindRoot[x Tanh[x] - 1 == 0, {x, 1}]
Print[]
Print[" Tc = ", 1 / xc, "·J", ", where J is Ising exchange interaction"]
```

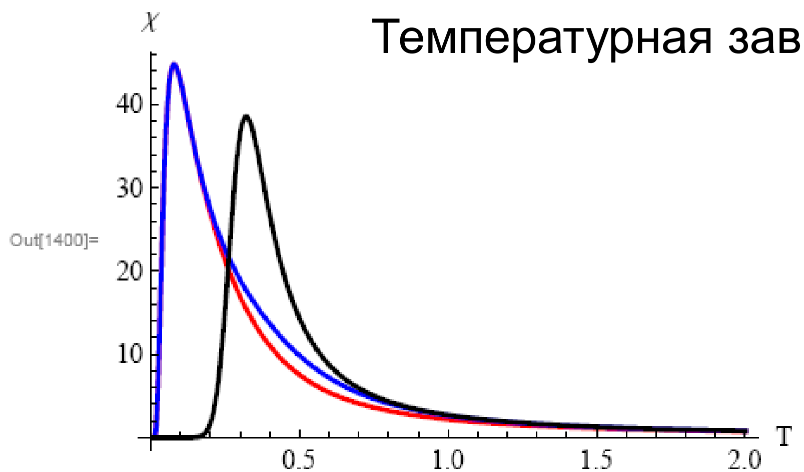
# Изучение размерных эффектов: однородная конечная цепочка, замкнутая в кольцо, «открытая» цепочка и бесконечная цепочка

Температурная зависимость намагниченности




Susceptibility at h/J = 0.005 K for line, ring of N = 6 spins and infinite chain J = 2

Температурная зависимость восприимчивости

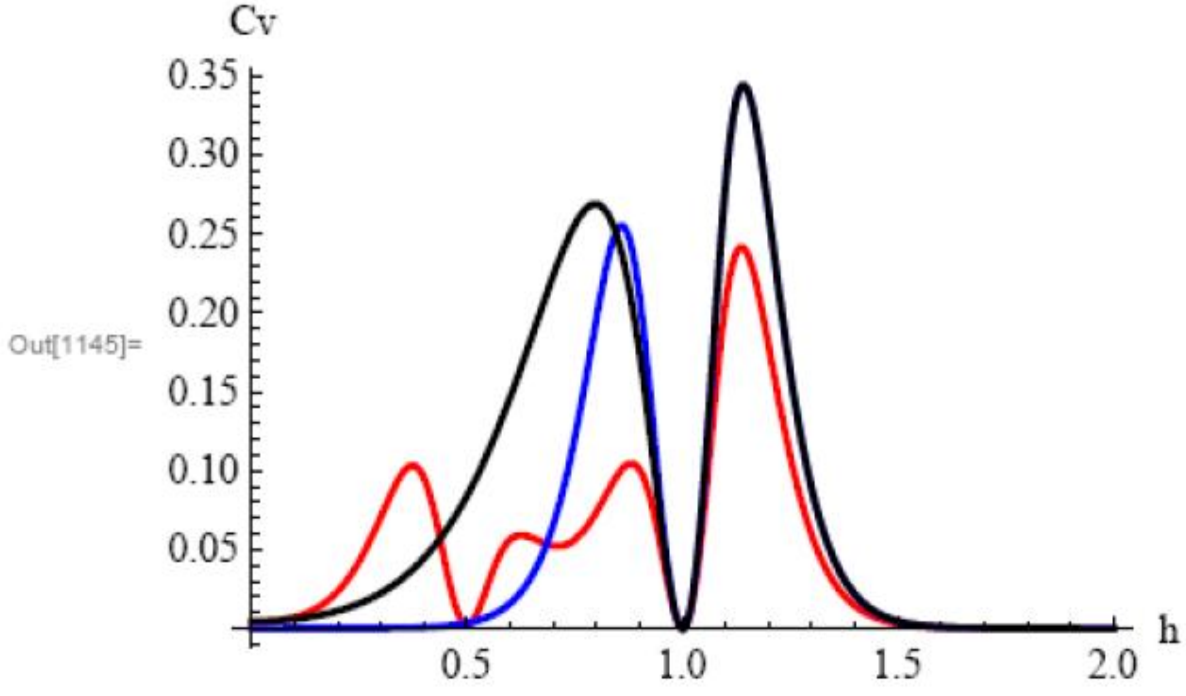



Line - red curve, ring - blue curve, Infinite chain - black curve

Полевая зависимость теплоемкости при низких температурах

№ 1

Spesific Heat at T = 0.1 K for line, ring of N = 6  spins and infinite chain with J = -2



# Цепочка Изинга с двумя подрешетками $J_1 \neq J_2; \quad h_1 \neq h_2$

$$\hat{V} = \hat{V}_1 \cdot \hat{V}_2 = \begin{pmatrix} e^{\beta J_1 + \beta/2 (h_1 + h_2)} & e^{-\beta J_1 + \beta/2 (h_1 - h_2)} \\ e^{-\beta J_1 - \beta/2 (h_1 - h_2)} & e^{\beta J_1 - \beta/2 (h_1 + h_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\beta J_2 + \beta/2 (h_1 + h_2)} & e^{-\beta J_2 - \beta/2 (h_1 - h_2)} \\ e^{-\beta J_2 + \beta/2 (h_1 - h_2)} & e^{\beta J_2 - \beta/2 (h_1 + h_2)} \end{pmatrix}$$

Результирующая трансфер-матрица

$$V = \begin{pmatrix} e^{\beta(J_1 + J_2) + \beta(h_1 + h_2)} + e^{-\beta(J_1 + J_2) + \beta(h_1 - h_2)} & e^{\beta(J_1 - J_2) + \beta h_2} + e^{-\beta(J_1 - J_2) - \beta h_2} \\ e^{-\beta(J_1 - J_2) + \beta h_2} + e^{\beta(J_1 - J_2) - \beta h_2} & e^{-\beta(J_1 + J_2) - \beta(h_1 - h_2)} + e^{\beta(J_1 + J_2) - \beta(h_1 + h_2)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} e^{\beta(J_1 + J_2) + \beta(h_1 + h_2)} + e^{-\beta(J_1 + J_2) + \beta(h_1 - h_2)} - \lambda & e^{\beta(J_1 - J_2) + \beta h_2} + e^{-\beta(J_1 - J_2) - \beta h_2} \\ e^{-\beta(J_1 - J_2) + \beta h_2} + e^{\beta(J_1 - J_2) - \beta h_2} & e^{-\beta(J_1 + J_2) - \beta(h_1 - h_2)} + e^{\beta(J_1 + J_2) - \beta(h_1 + h_2)} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

В случае нулевого магнитного поля (H=0)

$$\begin{vmatrix} e^{\beta(J_1+J_2)}+e^{-\beta(J_1+J_2)}-\lambda & e^{\beta(J_1-J_2)}+e^{-\beta(J_1-J_2)} \\ e^{-\beta(J_1-J_2)}+e^{\beta(J_1-J_2)} & e^{\beta(J_1+J_2)}+e^{-\beta(J_1+J_2)}-\lambda \end{vmatrix}=0$$

Свободная энергия

$$f=-T\ln\lambda_+=-T\ln\left(4ch\frac{J_1}{T}\cdot ch\frac{J_2}{T}\right) \qquad \lambda_+=4ch\frac{J_1}{T}\cdot ch\frac{J_2}{T}$$

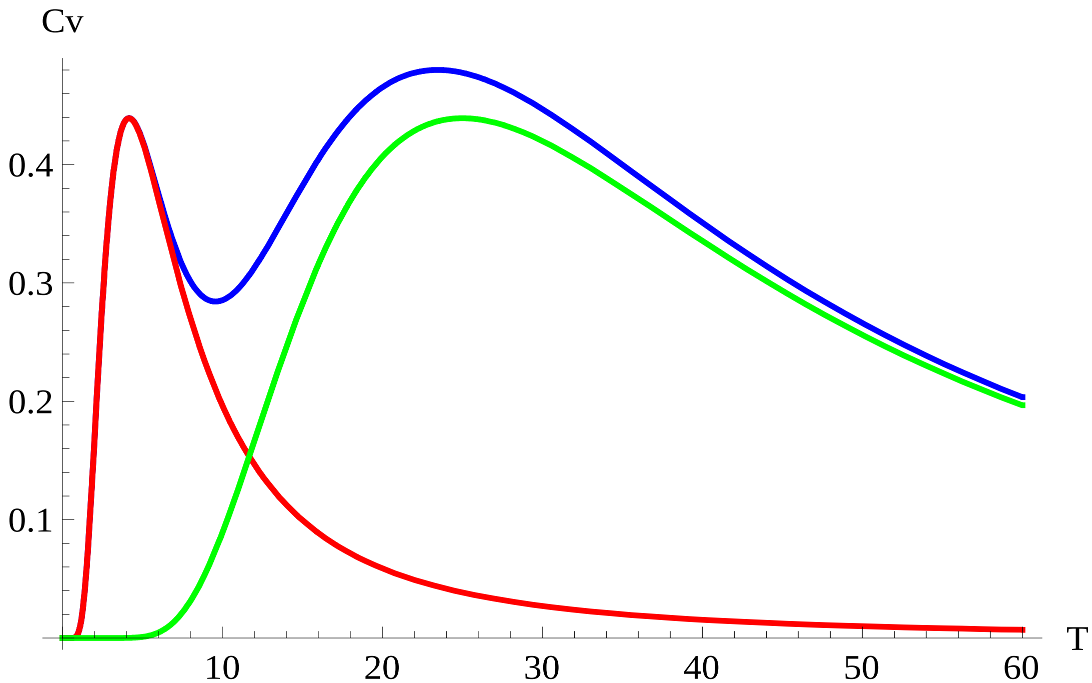
Внутренняя энергия

$$E=J_1 th\left(\frac{J_1}{T}\right)+J_2 th\left(\frac{J_2}{T}\right)$$

Теплоемкость

$$C=\left(\frac{J_1}{T}\right)^2\frac{1}{ch^2\left(\frac{J_1}{T}\right)}+\left(\frac{J_2}{T}\right)^2\frac{1}{ch^2\left(\frac{J_2}{T}\right)}.$$

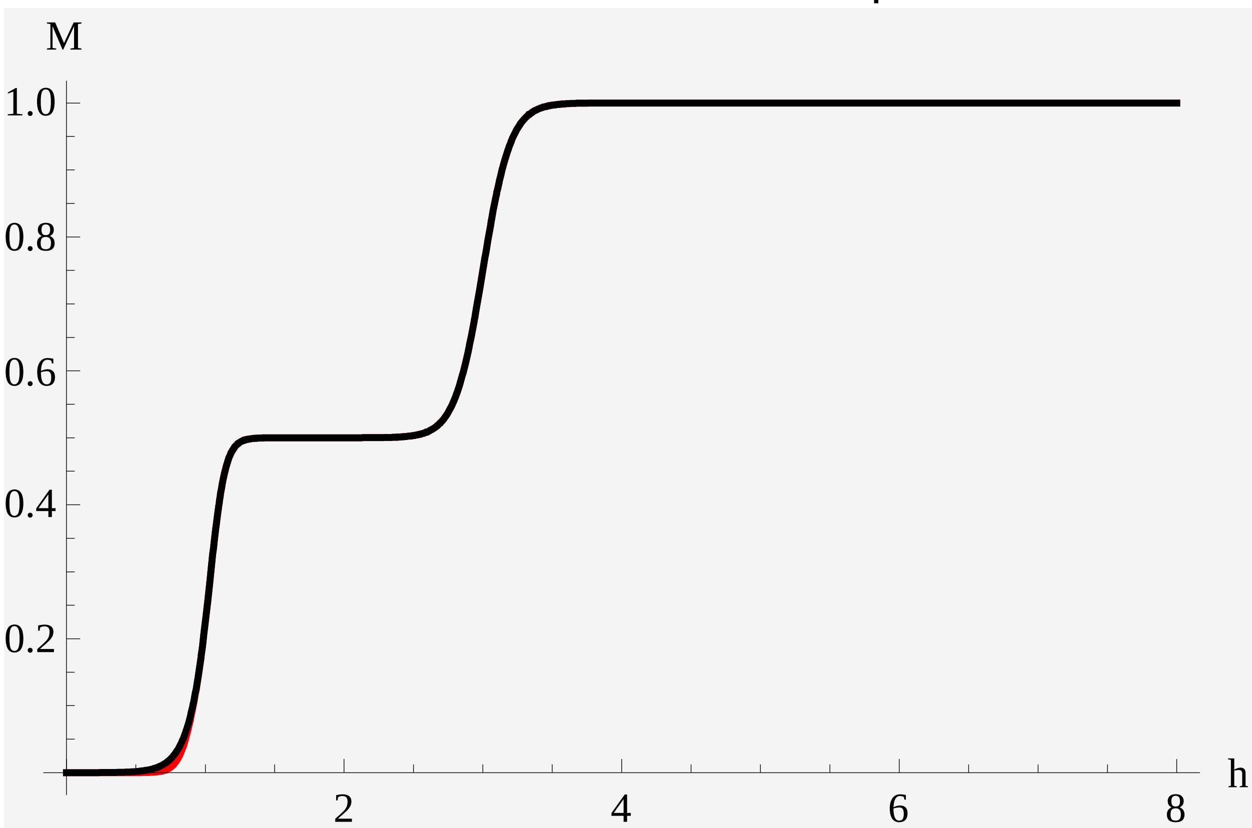
# Температурные зависимости теплоемкости для однородных цепочек с разными константами и для цепочки с двумя подрешетками при H=0




Из рисунка видно, что два максимума для цепочки с чередующимися взаимодействиями непосредственно связаны с аномалией Шоттки. Таким образом, в случае двух подрешеток (чередования взаимодействий) может быть две аномалии Шоттки в температурной зависимости теплоемкости в нулевом поле. Если же магнитное поле отлично от нуля, может появиться и третий максимум.

# Полевая зависимость намагниченности для замкнутой цепочки с двумя подрешетками при $\mu_1 \neq \mu_2$

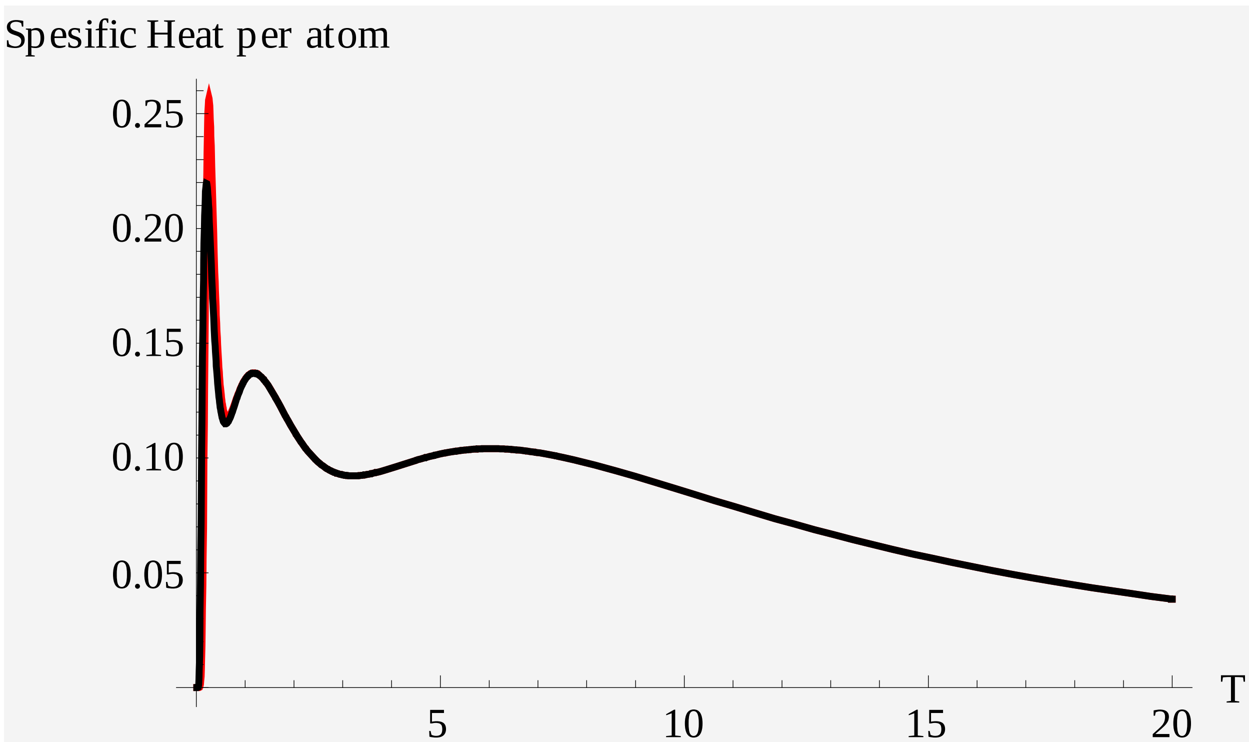
N = 10, J1 = -8. K, J2 = 2 K при T = 0.1 K




Конечной цепочке – отвечает красная линия, бесконечной цепочке – черная линия

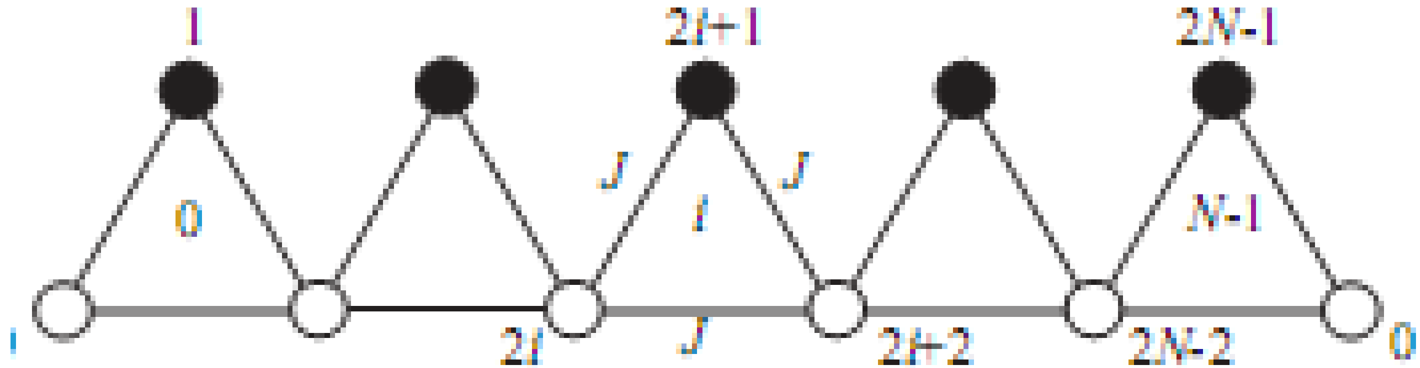
Температурная зависимость теплоемкости в магнитном поле для цепочки с двумя подрешетками

кольцо из N = 7 спинов, J1 = -1. K, J2 = -20. K
μ1=μ2= 0.5, h/$\mu_B$= 7 K




Конечной цепочке – отвечает красная линия, бесконечной цепочке – черная линия

# Антиферромагнитная треугольная цепочка Изинга




**Подобной структуре соответствует в рамках простейшей модели Изинга такой гамильтониан**

$$\mathrm{H} = -J\sum_{i=0}^{N-1}\sigma_{2i}^{z}\sigma_{2i+1}^{z} - \sum_{i=1}^{N-1}\left(J_1\sigma_{2i}^{z}\sigma_{2i+1} + J_2\sigma_{2i+1}^{z}\sigma_{2i+2}^{z}\right)$$

# Элементы матрицы V будут выглядеть так

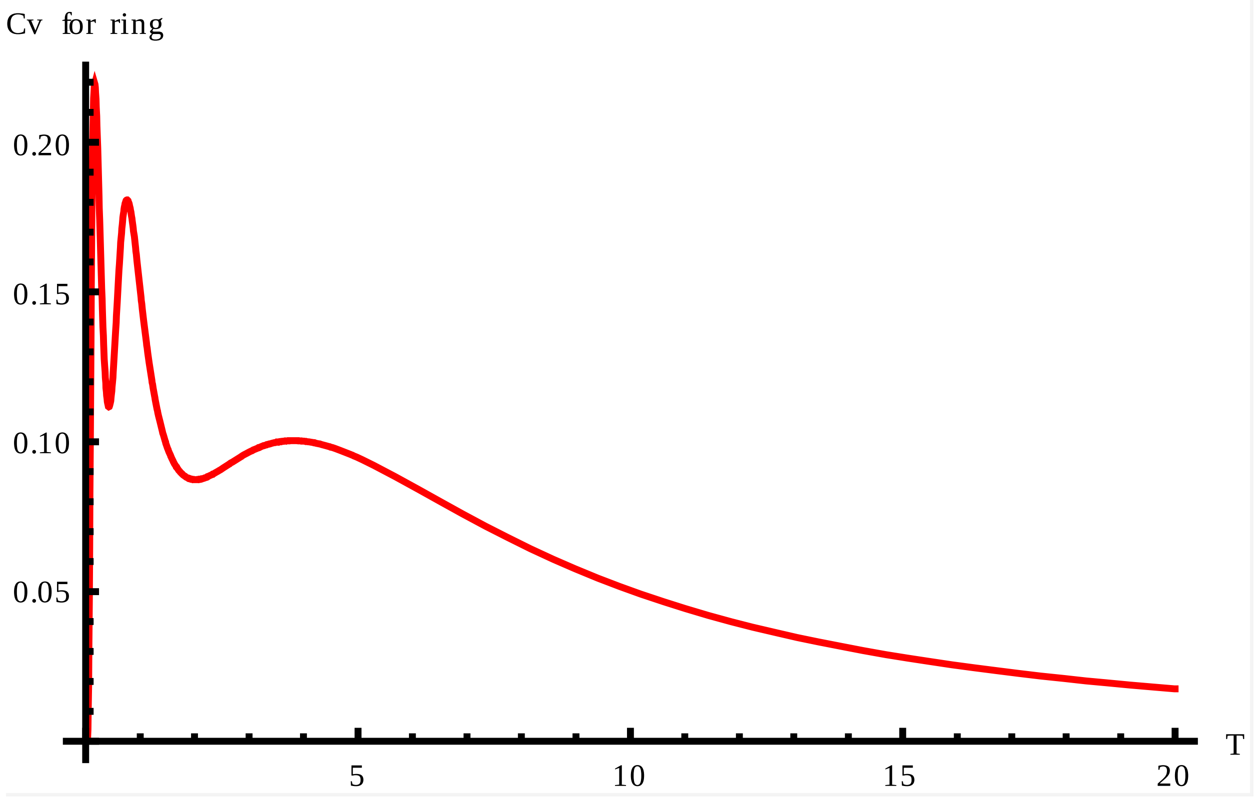
$$V_{1,1} = e^{\beta\left[J+J_1+J_2+\mu_1 H+\mu_2 H\right]} + e^{\beta\left[J-J_1-J_2+\mu_1 H-\mu_2 H\right]}$$

$$V_{1,2} = e^{\beta\left[-J+J_1-J_2+\mu_2 H\right]} + e^{\beta\left[-J-J_1+J_2-\mu_2 H\right]}$$

$$V_{2,1} = e^{\beta\left[-J-J_1+J_2+\mu_2 H\right]} + e^{\beta\left[-J+J_1-J_2-\mu_2 H\right]}$$

$$V_{2,2} = e^{\beta\left[J-J_1-J_2-\mu_1 H+\mu_2 H\right]} + e^{\beta\left[J+J_1+J_2-\mu_1 H-\mu_2 H\right]}$$

# Температурная зависимость теплоемкости для треугольной цепочки в нулевом магнитном поле

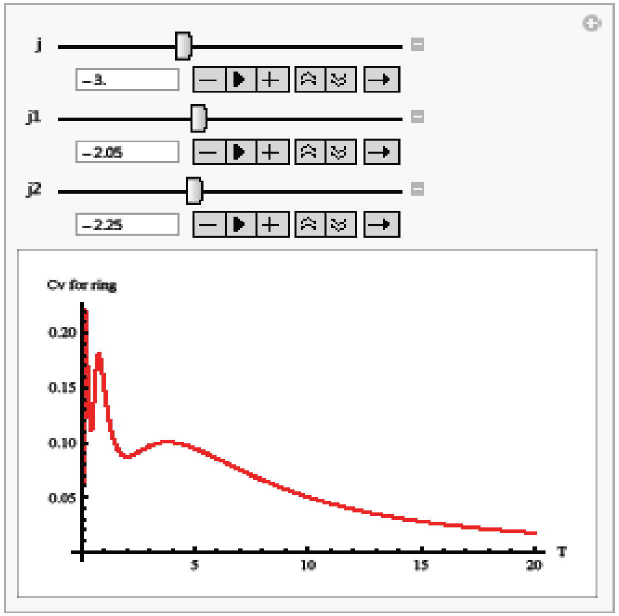


# Протокол работы программы

In[1]:=

```
Clear[n, h];
n = 20;
Manipulate[
 v =
  ( Exp[(j + j1 + j2) / t] + Exp[(j - j1 - j2) / t]    Exp[(-j + j1 - j2) / t] + Exp[(-j - j1 + j2) / t]
    Exp[(-j - j1 + j2) / t] + Exp[(-j + j1 - j2) / t]   Exp[(j - j1 - j2) / t] + Exp[(j + j1 + j2) / t] );
 x = Eigenvalues[v];
 x1 = x[[1]];
 x2 = x[[2]];
 sr = (x1)^n + (x2)^n;
 frt = -Log[sr] / n / 2;
 fring = t frt;
 en = -t^2 ∂t frt;
cv = ∂t en;
 cvring = Plot[cv, {t, 0.0001, 20}, AxesLabel -> {"T", "Cv for ring"},
   PlotStyle -> {Red, Thick}, AxesOrigin -> {0, 0}, PlotRange -> All, AxesStyle -> Thick],
 {j, -10, 10}, {j1, -10, 10}, {j2, -10, 10}]
```

Out[3]=

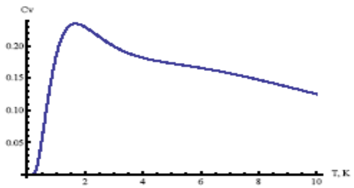


# Моделирование температурной зависимости теплоемкости в нулевом поле для цепочки Изинга со случайными взаимодействиями

```
In[40]:=
Clear[n, j, x1, x2, zn, zn, f, m]
h = 0;
n = Input["N = "];
j = Table[Input["J(i)= "], {i, 1, n}];

x1 = e^(j/(4 t)) (Cosh[h / t] + √(Sinh[h / t]^2 + e^(-4 j/t)));
x2 = e^(j/(4 t)) (Cosh[h / t] - √(Sinh[h / t]^2 + e^(-4 j/t)));
zn = ∏_{i=1}^{n} x1[[i]] + ∏_{i=1}^{n} x2[[i]];
f = Log[zn] / n;
en = t^2 ∂_t f;
cv = ∂_t en;
Plot[cv, {t, 0.01, 10}, AxesOrigin → {0, 0}, PlotStyle → Thick,
 AxesStyle → Thick, AxesStyle → Medium, AxesLabel → {"T, K", "Cv"}]
Print["N = ", n]
Print["J(n) = ", j // MatrixForm]
```

Out[50]=




N = 10

$$J(n) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 10 \\ -1 \\ -2 \\ -5 \\ -0.1 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$