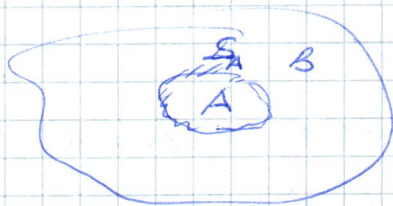


Entanglement in Many-Body Systems

Уравнение ~~матрицы~~ von Neumann энтропии, связанное с
редуцированной матрицей плотности системы



$$S_{\text{red}} = 14 \times 41$$

$$S_A = S_B = 14 \times 41$$

Entanglement entropy (geometric entropy) } bipartite entanglement

$$S(S_A) = - \sum p_{ij} \log p_{ij}$$

Мотивация:

Технически важно — как по мере увеличения
корреляции (запутанности состояний) в многочастичных
системах?

Исследования показали что ~~энтропия~~ entanglement entropy
многочастичной системы ~~увеличивается~~ ~~увеличивается~~

"area law" (отсюда ~~здесь~~ ~~здесь~~ ~~здесь~~ — геометрическая
энтропия)

$$S(S_A) \sim \frac{\text{scaling of entropy}}{S_A} \sim \frac{1}{S_A}$$

surface area

$$d=2 \quad S_A \propto L$$

$$d=1 \quad S_A \propto \log L$$

$$S(S_A) = \text{const}$$

"Area law" не всегда выполняется. Для классических
фазовых переходов ($H(f)$)

$f < f_c$ $f_{\text{max}} < f_{\text{eq}}$
 $f > f_c$ $f_{\text{max}} > f_{\text{eq}}$

References.

- 1) J. Eisert, M. Cramer, M.B. Plenio
"Area laws for the entanglement entropy - a review
Rev Mod. Phys. (2008)
- 2) L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh, V. Vedral
"Entanglement in Many-Body systems"
Rev. Mod. Phys. (2008)

В квантовой теории гравитации энергия зависит от "объёма", но слабо (логарифмически)

"Закон площади" подсказывает нам, что для локального взаимодействия квантовые корреляции между выбранным объёмом и её окружением определяются границей этого объёма.

Интерес к расчёту энергии энтропии был стимулирован известной формулой Bekenstein-Hawking для термодинамической энергии чёрной дыры

$$A_H = 4\pi r_g^2$$

$$r_g = 2GM/c^2$$

$$S_{BH} = \frac{k_B}{4} \frac{A_H}{\ell_P^2}$$

площадь поверхности горизонта чёрной дыры.

(Этот закон термодинамики при наличии чёрных дыр выполняется только для суммарной энергии материи и чёрных дыр).

Holographic principle suggest that all information that is contained in a volume of space can be represented by information that resides on the boundary of that region

Для одномерных систем в критическом режиме ($\xi \rightarrow \infty$)

переносимый заряд

был рассчитан геометрическим методом

для системы с периодом $2a$

(тогда определение на бесконечности $-\infty < x < \infty$)

$$S_A = \frac{c}{3} \log\left(\frac{L}{a}\right) + \text{const}$$

ultraviolet cutoff.

Cardy, Calabrese

Holzhay, Larsen,

Wilczek (1994)

c — central charge (определяет универсальный температурный скачок, $c = 1/2$ для изоспинных спинов, $c = 1$ для свободных фермионов)

Generalized expression for formula for finite temperature T

$$S_A(T) = \frac{c}{3} \log\left[\frac{\text{sh}\left(\frac{\pi T L}{2v_F}\right)}{(\pi T a / v_F)}\right] \quad \frac{1}{\delta} = 1$$

Cardy, Calabrese

Korepin

$$1) \quad T \ll \frac{v_F}{L} \quad - \quad S_A \approx \frac{c}{3} \log\left(\frac{L}{a}\right)$$

$$2) \quad T \gg \frac{v_F}{L} \quad S_A(T) \approx \frac{\pi c L T}{3 v_F}$$

entropy density $\frac{S_A(T)}{L} \sim \frac{1}{\delta} T$
(Gibbs entropy)

Not far from criticality critical point $\xi = \xi(p_c)$ and geometrical entropy saturates $\xi \ll L$

$$S_A \approx \frac{c}{3} \log \xi + \text{const.}$$