Information in quantum mechanics.

N.D. Mermin "Quantum Computer Science: An Introduction" Cambridge Univ. Press (2007)

Classical "bit" is the smallest unit of classical info. It represents the information which we gain when we receive the definite answer "Yes" or "No" to a question about which we had no prior knowledge.

Bit of info is represented mathematically as binary digit "0" or "1", physically by a two ~~phy~~ states
$\uparrow\vec{n}$ $\downarrow\vec{n}$ (magnetization)
high/low current in transistors, etc.

It is robust against the presence of noise (if the noise is small compared to the difference in signal strength)
(two possible encoding of math. bit in a phys. bit
~~"0" - high~~ 0/1 $\Rightarrow$ high/low or 0/1 – low/high)

Qubits.

two-state quantum system (2-state Hilbert space)

All two-state quantum systems are mathematically equivalent to a spin-1/2 particle in a magnetic field

$$H = \frac{\hbar}{2}\vec{\omega}\vec{\sigma} \qquad [\omega] = \frac{1}{\text{sec.}} \qquad \vec{\sigma} \text{ are the Pauli matrices}$$

$\hbar\omega$ is the transition frequency from ground state $|0\rangle$ to excited state $|1\rangle$)

The most general measurement ("Stern-Gerlach" measurement) is the measurement of spin projection along a single axis $\vec{n}$

$$\hat{O} = \vec{n}\vec{\sigma}$$

$$\hat{O}^2 = I \Rightarrow \text{eigenvalues } Q = \pm 1$$

1 bit of information $\Rightarrow$

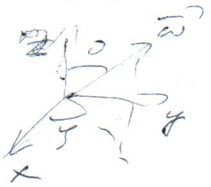
(this measurement gives us 1 bit of information
спин ∥ или антипараллелен направлению ~~...~~ $\vec{n}$) (quantum non demolition)

Такое измерение QND (первое измерение даст случайно +1 или −1)
повторяемо (первое измерение даст случайно ... вдоль той же самой оси ~~даст~~
последующее измерение вдоль той же самой оси даёт всегда результат идентичный первому измерению]

Если после измерения, например, σ_z (вдоль оси "z") измерить σ_x

(или σ_y) результат опять будет случайным ($+1$ или -1 с 50% вероятностью)

Но в общем случае спинорные собственные функции ~~вычислить~~ $\hat H$ $|\psi_\pm\rangle$ $H|\psi_\pm\rangle = \pm\frac{\hbar\omega}{2}|\psi_\pm\rangle$ имеют вид



$$\omega_x\sigma_x + \omega_y\sigma_y + \omega_z\sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & \omega_x \\ \omega_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i\omega_y \\ i\omega_y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_z & 0 \\ 0 & -\omega_z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \omega_z & \omega_x - i\omega_y \\ \omega_x + i\omega_y & -\omega_z \end{pmatrix} =$$

$\omega_z = |\omega|\cos\theta$

$\omega_x = |\omega|\sin\theta\cos\varphi$

$\omega_y = |\omega|\sin\theta\sin\varphi$

$$\omega_x - i\omega_y = |\omega|(\sin\theta\cos\varphi - i\sin\theta\sin\varphi) =$$

$$= |\omega|\sin\theta\, e^{-i\varphi}$$

$$= |\omega|\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$|\psi_+\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_+ \\ v_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_+ \\ v_+ \end{pmatrix}$$

$\cos\theta\, u_+ + \sin\theta\, e^{-i\varphi} v_+ = u_+$ $\qquad \sin\theta\, e^{-i\varphi} v_+ = u_+(1-\cos\theta)$

$\sin\theta\, e^{i\varphi} u_+ - \cos\theta\, v_+ = v_+$ $\qquad (1+\cos\theta)\, v_+ = \sin\theta\, e^{i\varphi} u_+$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta - 1 & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta - 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_+ \\ v_+ \end{pmatrix} = 0$$

$$u_+ = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} e^{-i\varphi} v_+ =$$

$\det(\,) = 1 - \cos^2\theta - \sin^2\theta = 0$

$$= \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} e^{-i\varphi} v_+$$

$$u_+ = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} e^{-i\varphi} v_+$$

Нормировка.

$$|u_+|^2 + |v_+|^2 = 1$$

$$(\operatorname{ctg}^2\tfrac{\theta}{2} + 1)|v_+|^2 = 1 \qquad |v_+|^2 = \sin^2\tfrac{\theta}{2}$$

$$\frac{|v_+|^2}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = 1 \qquad v_+ = e^{i\alpha}\sin\tfrac{\theta}{2}$$

Удобно выбрать $\alpha = \frac{\varphi}{2}$

$$\boxed{|\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \end{pmatrix} \qquad |\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi/2} \\ \cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2} \end{pmatrix}}$$

Пусть $\theta = \varphi = 0$

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z \qquad |\uparrow\rangle \equiv |\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \equiv |\downarrow\rangle$$

We need two real numbers (θ and φ) to specify the quantum state of spin. It means that an infinite number of classical bits is needed to describe qubit.

On other hand we ~~need~~ ~~get~~ obtain only 1 classical qubit ~~to specify~~ by ~~the~~ doing measurements. This huge asymmetry is a key concept of our understanding of quantum info.

Мы ~~уже~~ точно знаем в каком состоянии находится спин после измерения: $|\uparrow\rangle$ или $|\downarrow\rangle$. Но измерение не даёт ответа в каком состоянии (углы "θ" и "φ") находился спин до измерения (эта концепция "коллапса волновой функции")

"No-cloning theorem" — Wootters, Zurek (1982) "A single quantum cannot be cloned" Nature 299, 802–803

1 qubit cannot be cloned!

Пусть мы имеем "наш" qubit в основном состоянии и неизвестный нам кубит $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$. Тогда $|\psi\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes |0\rangle$

После клонирования

$$|\psi_c\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle)(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) = \alpha^2|00\rangle + \alpha\beta|01\rangle + \alpha\beta|10\rangle + \beta^2|11\rangle$$

С другой стороны любое преобразование в QM осуществляется линейным оператором $|\psi_c\rangle = U|\psi\rangle$ и поэтому при этом невозможно появление нелинейных коэффициентов. (В том случае, когда мы предварительно знаем состояние кубита α_0, β_0 мы легко его клонируем, используя конкретный оператор эволюции $U(\alpha_0, \beta_0)$)

$$\boxed{\text{Known states are readily cloned, but unknown states cannot be!}}$$

In quantum teleportation protocol an unknow state is perfectly reproduced at a distant location. This is not restricted by "no-cloning theorem" because the original state is destroyed during the process of teleportation

~~[illegible]~~

Quantum "money" (S. Weisner 1970-th)

Each bill is ~~en~~coded classically ("number") and randomly ($\uparrow \leftarrow \leftarrow \downarrow \downarrow \leftarrow \ldots$). using the results of

"Z"-axis quantizatio   X axis quantization

qubits measurement by "Z" and "X" quantization axis.
Treasure department knows ~~how fo~~ which какие оси использованы были выбраны для каждого номера банкноты. Так как неизвестный qubit ~~[illegible]~~ не может быть клонирован, любая подделка банкнот с одинаковым номером ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ всегда выявляется.

Density matrix of qubit.

$$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| \qquad |\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}$$

$$|0\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad |1\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$\hat{\rho}_{QB} = \cancel{\beta^*\alpha} \begin{pmatrix}\beta\\ \alpha\end{pmatrix}(\beta^* \ \alpha^*) = \begin{pmatrix}|\beta|^2 & \beta\alpha^*\\ \beta^*\alpha & |\alpha|^2\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1 \iff \langle\psi|\psi\rangle = 1$$

$$\hat{\rho}^2 = |\psi\rangle\underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{I}\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \hat{\rho}$$

clean state $\boxed{\hat{\rho}_c^m = \hat{\rho}_c} \Rightarrow \mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_c^m = 1.$

For mixed state $\qquad \hat{\rho} = \sum_j p_j |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| = \begin{pmatrix}p_1 & \cdots\\ \cdots & p_N\end{pmatrix}$

$$\mathrm{Tr}\,\rho_m = 1 \qquad \sum_{j=1}^{N} p_j = 1$$

$$\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}_m^2 = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix}p_0^2 & \cdots\\ \cdots & p_N^2\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{N} p_j^{(2)} < 1$$

$$\boxed{\hat{\rho} = \frac{1}{2}\left(I + \vec{P}\vec{\sigma}\right)}$$

polarization

$$\hat{\rho}_c^2 = \frac{1}{4}\left(I + 2(\vec{P}\vec{\sigma}) + (\vec{P}\vec{\sigma})^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(I + \vec{P}^2 I + 2(\vec{P}\vec{\sigma})\right) = \hat{\rho}_c$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\vec{P}^2 = 1} \Rightarrow (\theta, \varphi) \text{ on Bloch sphere.}$$

$$\hat{\rho}_m \Rightarrow \vec{P}^2 < 1$$

Spin correlations in entangled states

Bell basis

$$|B_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$\langle B_j|B_k\rangle = \delta_{jk}$$

$$|B_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

$$|B_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle\right)$$

$$|B_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right)$$

Bell basis span full Hilbert space of 2-qubits ($N=4$)
Any state can be expressed in terms of Bell basis vectors.

$$-|\uparrow\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|B_2\rangle + |B_3\rangle\right)$$

product state
$\parallel$
$|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$

Bell states are maximally entangled.

$$\langle B_n|\sigma_j^{(k)}|B_n\rangle = 0 \qquad \begin{aligned} n &= 0,1,2,3 \\ j &= x,y,z \\ k &= 1,2. \end{aligned}$$

for instance: $\langle B_0|\sigma_x^{(1)}|B_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle B_0|\sigma_x^{(1)}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle B_0|\left(|\downarrow\downarrow\rangle - |\uparrow\uparrow\rangle\right)$

$$\sigma_x|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \qquad \sigma_x|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \quad \Big| = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle B_0|B_3\rangle = 0$$

However spins in entangled states are strongly correlated

no summation over "j"

$$\langle B_0|\sigma_j^{(1)}\sigma_j^{(2)}|B_0\rangle = -1 \qquad \langle B_0|\vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}|B_0\rangle = -3$$

for instance

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\langle B_0|\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle B_0|\left(|\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle\right) = -\langle B_0|B_0\rangle = -1$$

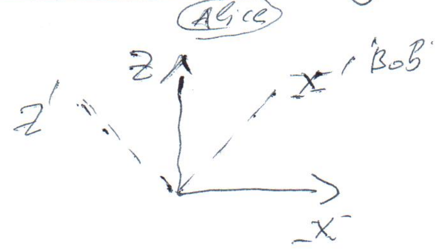
<u>Problem</u>: to verify that $\langle B_0|\vec{\sigma}^{(1)}\vec{\sigma}^{(2)}|B_0\rangle = -3$

For product state $|\langle\vec{\sigma}\rangle| \leq 1$.

J. S. Bell inequality (1964)

Correlation between measurement results for entangled states are stronger than any possible classical correlations that can be induced by local "hidden" variable.

CHSH-inequality (Clauser, Horn, Shimoni, Holt PRL, 1969)



"Alice" uses coordinate system "A" to ~~randomly~~ measure qubit (~~randomly~~)

"Bob" uses coordinate system "B" to ~~rand~~ measure "qubit"

They share a pair of entangled qubits.

After many trials (each trial for a fresh copy of entangled qubit) Alice and Bob compare their results and compute correlation function

(*)

$$S = \langle (x+z)x' \rangle - \langle (x-z)z' \rangle$$

Results of measurements ⇔ random numbers either +1 or −1

In particular trial "A" chooses randomly "x" or "z" (Classically the qubit not measured still has a value either +1 or −1 ⇔ then either $x = z$ or $x = -z$

Тогда одна из комбинаций $x \pm z$ равна нулю ненулевая комбинация (если $x=z$ $S = 2\langle x x' \rangle$ ≤

$\sigma_x^{(1)}$ $\sigma_{x'}^{(2)}$ ⇒ ≤ 1

$x' = \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}(x+z)}$

$\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle xx \rangle + \langle xz \rangle\right)}$ ±1

Classical bound for correlation function S $\boxed{-2 \le S \le 2}$

~~For~~ spin is vector $\vec{\sigma}$

On the other hand

$$\sigma_{x'} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z) \qquad \sigma_{z'} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-\sigma_x + \sigma_z)$$

$$S = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{ \langle (x+z)(x+z) \rangle - \langle (x-z)(-x+z) \rangle \right\} =$$

$$= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left\{ \langle xx \rangle + \cancel{\langle xz \rangle} + \cancel{\langle zx \rangle} + \langle zz \rangle + \langle xx \rangle - \cancel{\langle xz \rangle} - \cancel{\langle zx \rangle} + \langle zz \rangle \right\} =$$

$$= \sqrt{2}\left(\langle xx \rangle + \langle zz \rangle \right) \overset{?}{=} -2\sqrt{2}$$

for Bell state $|B_0\rangle$

! The violation of CHSH inequality (always realized in experiment) teach us that in quantum world observables do not have values if you do not measure them

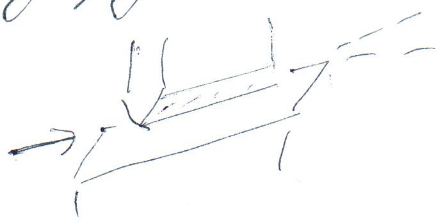
{ The ~~un~~observed spin component simply do not have values }

До тех пор пока мы не проводим измерения qubit (и любая другая квантовая система) не имеет никаких численных значений (например +1 с вероятностью p_{+1} и −1 с вероятностью p_{-1}). До измерения оператор спина — это матрица ($\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$) а не число

Quantum Measurements

1). measurement-induced decoherence
2). Back-action

Consider ~~SG~~ Stern-Gerlach experiment (1921 y.): measurement of ~~spin~~ electron spin-projection by separating spin-↑ and spin-down electrons in space (using gradient of magnetic field: ~~...~~ отклонения молекулярного пучка в неоднородном магнитном поле



~~пучок~~ пучок атомов лития расщепляется на два пучка (один валентный электрон со спином 1/2)

В классической теории пучок расщепляется на множество пучков (нет квантования момента и проекция на магнитное поле может иметь любое значение)

Итак, начальный вектор состояния (product state)

$$|\psi_i\rangle = (\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) f(r)$$

$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$

$\int dr |f(r)|^2 = 1.$

$\langle f|f\rangle = 1$

После прохождения магнита

$$|\psi_f\rangle = \alpha|\uparrow\rangle f_\uparrow(r) + \beta|\downarrow\rangle f_\downarrow(r)$$

(entangled state)

reduced d.m. for spin degree of freedom

$$\rho_i = \mathrm{Tr}_r |\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \underbrace{\int dr |f(r)|^2}_{=1} \underbrace{\left(\alpha\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)}_{=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}}(\alpha^*, \beta^*) =$$

$$= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \\ \alpha^*\beta & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

Найдем среднюю проекцию спина

$$\langle \sigma_x \rangle = \mathrm{Tr}\, \sigma_x \rho_i = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\alpha|^2 & \alpha\beta^*\\ \alpha^*\beta & |\beta|^2\end{pmatrix} = \alpha^*\beta + \alpha\beta^* = 2\mathrm{Re}(\alpha^*\beta)$$

$$\langle \sigma_y \rangle = \mathrm{Tr}\, \sigma_y \rho_i = \mathrm{Tr}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\alpha|^2 & \alpha\beta^*\\ \alpha^*\beta & |\beta|^2\end{pmatrix} = i(\alpha\beta^* - \alpha^*\beta) = 2\mathrm{Im}(\alpha^*\beta)$$

$$\langle \sigma_z \rangle = \mathrm{Tr}\, \sigma_z \rho_i = |\alpha|^2 - |\beta|^2$$

После прохождения ~~магнита~~ полная матрица плотности

$$\rho(r,r') = |\psi(r)\rangle\langle\psi(r')| =$$

$$= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 f_\uparrow(r) f_\uparrow^*(r') & \alpha\beta^* f_\uparrow(r) f_\downarrow^*(r') \\ \alpha^*\beta f_\uparrow^*(r) f_\downarrow(r') & |\beta|^2 f_\downarrow(r) f_\downarrow^*(r') \end{pmatrix}$$

Unconditional reduced density matrix

$$\rho_u = \mathrm{Tr}_{r=r'} = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 \underbrace{\langle |f_\uparrow|^2 \rangle}_{=1} & \alpha\beta^* \langle f_\uparrow | f_\downarrow^* \rangle \\ \alpha^*\beta \langle f_\uparrow^* | f_\downarrow \rangle & |\beta|^2 \underbrace{\langle |f_\downarrow|^2 \rangle}_{=1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha\beta^* \langle f_\uparrow | f_\downarrow^* \rangle \\ \alpha^*\beta \langle f_\uparrow^* | f_\downarrow \rangle & |\beta|^2 \end{pmatrix}$$

$$f_{\uparrow\downarrow} = \langle f_\uparrow | f_\downarrow^* \rangle = \int dr\, f_\uparrow(r) f_\downarrow^*(r)$$ → интеграл перекрытия пространственных распределений поляризованных по спину пучков

$$f_{\downarrow\uparrow} = \int dr\, f_\downarrow(r) f_\uparrow^*(r) = f_{\uparrow\downarrow}^*$$

если $f_{\uparrow\downarrow} \to 0$ то ρ_u переходит в матрицу плотности смешанного состояния (measurement-induced dephasing)

Найдем ~~условную~~ матрицу плотности (при условии, что ~~результат измерения~~ ~~с вероятностью~~ ~~измерений~~ измерена координата R

$$\underset{\text{conditional}}{\rho_c(R)} = \frac{1}{P(R)} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 |f_\uparrow(R)|^2 & \alpha\beta^* f_\uparrow(R) f_\downarrow^*(R) \\ \alpha^*\beta f_\uparrow^*(R) f_\downarrow(R) & |\beta|^2 |f_\downarrow(R)|^2 \end{pmatrix}$$

где множитель

$$P(R) = |\alpha|^2 |f_\uparrow(R)|^2 + |\beta|^2 |f_\downarrow(R)|^2$$

обеспечивает $\mathrm{Tr}\,\rho_c(R) = 1$

③

~~Аналогично~~ Очевидно, что

$$\rho_\text{н} = \int dR\, P(R)\, \rho_c(R)$$

Матрица $\rho_c(R)$ описывает чистое состояние. ~~Действительно~~

$$\rho_c = |\psi_c\rangle\langle\psi_c|, \text{ где } |\psi_c\rangle = \frac{1}{\sqrt{P(R)}}\left(\alpha_c|\uparrow\rangle + \beta_c|\downarrow\rangle\right)$$

$$\alpha_c = \alpha f_\uparrow(R), \quad \beta_c = \beta f_\downarrow(R)$$

Мы видим, что в результате измерения вектор состояния изменился

$$|\psi_i\rangle \xrightarrow[\text{measurement}]{} |\psi_c\rangle$$

это изменение вектора состояния (волновой функции) называется "back action"

В новом состоянии (после измерения)

$$\langle\sigma_x\rangle = \frac{2}{P(R)}\,\mathrm{Re}(\alpha_c^*\beta_c)$$

$$\langle\sigma_y\rangle = \frac{2}{P(R)}\,\mathrm{Im}(\alpha_c^*\beta_c)$$

$$\langle\sigma_z\rangle = \frac{1}{P(R)}\left(|\alpha_c|^2 - |\beta_c|^2\right)$$

Weak measurement $f_\uparrow(r) \simeq f_\downarrow(r)$ (back action is small

Strong measurement $f_\uparrow(r) f_\downarrow(r) \to 0$

$$\begin{cases} \langle\sigma_x\rangle = 0 \\ \langle\sigma_y\rangle = 0 \\ \langle\sigma_z\rangle = \pm 1 \end{cases}$$

→ Strong back action

("+" with probability $|\alpha|^2$
"−" — " — $|\beta|^2$)