

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 1

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = 2/r - 3/r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , сменяя его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 2 в направлении  $(3, -4)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 4$  движется в поле потенциальной ямы  $U = 1$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -2e^{-2r}/r$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = 2/r + 3/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 2. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $60^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 5$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица падает в центр поля  $U = -2/r^3$  с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при малых значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -2/r - 3/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 5$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $a$  и  $2a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = 4\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 2

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = 3/r^2 + 3r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , смещая его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 3 в направлении  $(-1, -2)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 6$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -1$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -4/r^2 + 2/r^3$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = 2/r - 4/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 3. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $90^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 4$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица в поле  $U = 3/r^2$  уходит на бесконечность с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при больших значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -3/r - 4/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 6$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $3a$  и  $2a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = 5\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 3

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = -2/r - 4/r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , смещая его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 1 в направлении  $(2, 5)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 5$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -3$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -3e^{-4r^2}$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = -2/r + 3/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 4. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $120^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 3$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица в поле  $U = -5/r^2$  уходит на бесконечность с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при больших значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -2/r - 5/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 6$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $4a$  и  $3a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = -2\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 4

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = 3/r^2 - r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , сменяя его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 3 в направлении  $(-1, 6)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 1$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -5$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -3e^{-4r}/r$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = -2/r - 5/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 4. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $60^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 2$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица падает в центр поля  $U = -4/r^2$  с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при малых значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -4/r - 5/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 6$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $5a$  и  $2a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = -6\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 5

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = -3/r + 3/r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , сменяя его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 2 в направлении  $(3, -4)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 6$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -7$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -5/r^2 + 3/r^3$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = 6/r + 3/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 5. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $90^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 6$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица в поле  $U = 2/r^3$  уходит на бесконечность с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при больших значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -2/r - 6/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 6$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $3a$  и  $2a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = -7\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 6

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = -2/r^2 + 3r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , смещая его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 3 в направлении  $(-1, -1)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 6$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -9$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -5e^{-6r^2}$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = 2/r - 7/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 4. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $120^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 7$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица падает в центр поля  $U = -12/r^5$  с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при малых значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -7/r - 2/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 6$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $6a$  и  $2a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = -8\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 7

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = 2/r + 6/r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , сменяя его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 2 в направлении  $(6, -1)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 8$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -2$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -e^{-6r}/2r$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = -1/2r + 3/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 1. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $60^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 8$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица в поле  $U = 1/r^4$  уходит на бесконечность с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при больших значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -8/r - 3/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 7$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $a$  и  $a/3$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = -9\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 8

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = -3/r^2 - 2r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , смещая его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 3 в направлении  $(-5, -4)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 1$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -6$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -2/r^2 + 1/r^3$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = -2/r - 1/2r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 4. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $90^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 9$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица падает в центр поля  $U = -3/r^5$  с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при малых значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -2/r - 1/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 4$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $2a$  и  $a/4$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = 9\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?



## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 9

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = 3/r + 7/r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , сменяя его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 3 в направлении  $(-3, 1)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 16$  движется в поле потенциальной ямы  $U = 0$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -4e^{-r^2}$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = 5/r + 5/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 5. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $120^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 10$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица в поле  $U = 2/r^4$  уходит на бесконечность с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при больших значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -1/r - 1/2r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 3$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $3a$  и  $a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = 5\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 10

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = 1/r^2 + 5r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , смещая его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 3 в направлении  $(3, 2)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 1/4$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -10$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -5e^{-6r}/r$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = 6/r - 3/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 3. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $60^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 1$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица падает в центр поля  $U = -5/r^6$  с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при малых значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -2/r - 1/3r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 3$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $a/2$  и  $2a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = 6\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 11

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = -1/r + 3/r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , смещая его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 0.5 в направлении  $(-2, -8)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 2$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -9$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -1/r^2 + 6/r^3$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = -1/3r - 3/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 2. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $90^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 2$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица в поле  $U = 2/r^5$  уходит на бесконечность с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при больших значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -1/10r - 5/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 3$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $a/2$  и  $a/3$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = -8\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 12

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = 1/r^2 - 3r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , смещая его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 3 в направлении  $(1, 2)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 10$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -10$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -5e^{-9r^2}$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = 4/r + 4/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 3. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $120^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 3$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица падает в центр поля  $U = -3/r^4$  с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при малых значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -1/4r - 1/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 3$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $5a$  и  $a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = -12\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 13

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = 2/r - 1/r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , сменяя его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 5 в направлении  $(1, -6)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 8$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -3$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -2e^{-5r}/3r$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = 6/r - 1/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 2. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $60^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 4$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица в поле  $U = 2/r^2$  уходит на бесконечность с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при больших значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -1/8r - 1/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 2$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $2a$  и  $4a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = 2\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 14

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = 3/r^2 - 2r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , сменяя его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 3 в направлении  $(-5, 12)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 8$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -5$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -5/r^2 + 2/r^3$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = -2/r + 4/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 2. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $90^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 5$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица падает в центр поля  $U = -7/r^2$  с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при малых значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -1/2r - 1/3r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 2$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $a/3$  и  $3a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = 3\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 15

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = -2/r - 4/r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , смещая его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 10 в направлении  $(-4, -3)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 1/2$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -1$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -2e^{-2r^2}$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = -8/r - 2/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 2. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $120^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 6$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица падает в центр поля  $U = -20/r^5$  с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при малых значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -8/r - 4/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 7$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $a$  и  $a/4$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = -3\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 16

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = -1/r^2 - r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , смещая его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 4 в направлении  $(-12, -5)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 1/3$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -4$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -4e^{-r}/r$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = 1/r - 5/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 6. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $60^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 7$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица падает в центр поля  $U = -1/2r^4$  с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при малых значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -2/r - 1/2r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 3$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $a/5$  и  $2a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = -7\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?



## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 17

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = 5/r + 6/r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , сменяя его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 6 в направлении  $(1, -2)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 4$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -9$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -5/r^2 + 1/r^3$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = -2/r + 2/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 2. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $90^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 8$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица в поле  $U = -5/r^3$  уходит на бесконечность с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при больших значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -4/r - 1/4r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 3$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $a$  и  $a/7$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = -5\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 18

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = -3/r^2 + 6r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , смещая его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 5 в направлении  $(-1, -2)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 5$  движется в поле потенциальной ямы  $U = 1.5$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -6e^{-2r^2}$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = -2/r + 6/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 2. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $120^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 9$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица в поле  $U = -4/r^6$  уходит на бесконечность с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при больших значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -2/r - 1/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 4$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $a$  и  $4a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = -20\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 19

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = 1/r - 3/r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , сменяя его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 4 в направлении  $(-2, 8)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 2$  движется в поле потенциальной ямы  $U = 0.5$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -2e^{-5r}/5r$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = -2/r + 1/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 4. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $60^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 10$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица в поле  $U = -1/r^7$  уходит на бесконечность с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при больших значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -5/r - 3/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 6$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $a/2$  и  $3a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = 15\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 20

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = 4/r^2 - r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , смещая его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 3 в направлении  $(6, 8)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 1/5$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -2$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -8/r^2 + 2/r^3$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = 6/r - 2/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 2. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $90^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 12$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица падает в центр поля  $U = -5/2r^4$  с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при малых значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -1/4r - 3/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 3$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $a/2$  и  $a/4$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = 3\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 21

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = -2/r + 2/r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , сменяя его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 4 в направлении  $(2, -1)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 9$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -5$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -7e^{-3r^2}$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = -5/r - 1/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 2. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $120^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 2$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица в поле  $U = -2/r^5$  уходит на бесконечность с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при больших значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -4/r - 1/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 3$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $a/2$  и  $4a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = 6\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 22

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = -2/r^2 - 8r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , сдвигая его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 2 в направлении  $(-5, 1)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 4$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -2$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -e^{-4r}/4r$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = 5/r - 4/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 2. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $60^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 4$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица падает в центр поля  $U = -1/r^8$  с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при малых значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -6/r - 6/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 7$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $3a$  и  $4a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = -4\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 23

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = 2/r - 8/r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , смещая его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 5 в направлении  $(3, 4)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 4$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -7$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -7/r^2 + 1/r^3$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = 7/r + 1/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 2. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $90^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 5$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица в поле  $U = 2/r^4$  уходит на бесконечность с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при больших значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -1/5r - 5/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 3$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $4a$  и  $3a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = -6\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?

## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 24

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = 8/r^2 + 4r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4r^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , сменяя его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость 3 в направлении  $(-3, 5)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 8$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -10$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -4e^{-2r^2}$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = -4/r + 2/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 3. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $120^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 12$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица в поле  $U = 1/r^6$  уходит на бесконечность с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при больших значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -3/r - 2/r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 5$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $5a$  и  $12a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = -8\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?



## Домашнее задание №9

### Движение в центральных полях.

#### Вариант 25

1. Частица массой  $m = 2$  движется в центральном поле  $U = -1/r - 1/r^2$ . Найдите минимальное/максимальное расстояние, на которое она подходит к центру. В каком случае ее движение финитно?
2. Пространственный осциллятор с функцией Лагранжа  $L = \dot{\mathbf{r}}^2 - 4\mathbf{r}^2$  приводят в движение в плоскости  $xy$ , смещая его вдоль оси  $x$  на 2 и сообщая ему скорость  $\sqrt{13}$  в направлении  $(6, -4)$ . Найдите период колебаний осциллятора и его траекторию.
3. Частица массой  $m = 6$  движется в поле потенциальной ямы  $U = -6$  при  $r < 1$  и  $U = 2$  при  $r > 1$ . При каком условии движение частицы финитно? В каком случае ее траектория замкнута?
4. Частица массой  $m = 2$  движется в поле  $U = -e^{-5r}/r$ . При каких значениях момента импульса частицы возможно ее финитное движение?
5. Частица массой  $m = 2$  находится в потенциальном поле  $U = 3/r - 3/r^3$ . В начальный момент она движется перпендикулярно направлению на центр со скоростью 5. При каких значениях начального расстояния до центра она будет падать в него/улетать на бесконечность?
6. Составьте функцию Лагранжа материальной точки массой  $m = 2$ , движущейся по поверхности конуса с углом при вершине  $60^\circ$ , расположенного вертикально, вершиной вниз. Ускорение свободного падения  $g = 1$ . Известно, что траектория точки близка к окружности  $r = 1/2$ , где  $r$  – расстояние до вершины конуса. Каковы необходимые для этого условия? Найдите поправку к траектории и закон движения.
7. Частица в поле  $U = 5/r^4$  уходит на бесконечность с конечного расстояния. Найдите асимптотически траекторию и закон движения частицы при больших значениях расстояния до центра  $r$ . Будет ли число оборотов вокруг центра конечным?
8. Частица массой  $m = 2$  падает в центр поля  $U = -1/r - 1/3r^3$ . Момент импульса частицы  $M = 3$ , энергия  $E = U_{\text{eff}}^{\text{max}} + \varepsilon$ , где  $U_{\text{eff}}^{\text{max}}$  – максимальное значение эффективной потенциальной энергии, а  $\varepsilon \ll 1$  – малый параметр. Качественно опишите траекторию частицы. Оцените число оборотов вокруг центра, сделанных ею при падении.
9. Пространственный осциллятор массой  $m$  совершает колебания с частотой  $\omega$ , двигаясь по эллипсу с полуосями  $2a$  и  $3a$ . При добавлении к потенциальной энергии малой поправки  $\delta U = \varepsilon/r^4$ ,  $\varepsilon \ll m\omega^2 a^6$ , орбита начинает прецессировать. Найдите угловую скорость прецессии.
10. Многие задачи о движении заряженных частиц в электромагнитных полях сводятся к задачам о движении в центральных полях. Рассмотрим электрон в поле магнитного диполя, направленного вдоль оси  $z$ . Слагаемое в функции Лагранжа, соответствующее взаимодействию электрона с таким полем, имеет вид  $\delta L = 6\dot{\mathbf{r}}[\mathbf{e}_z, \mathbf{r}]/r^3$ , где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . При каком условии движение электрона в плоскости  $xy$  финитно? Найдите период его движения по траектории, близкой к окружности. В каком случае эта траектория будет замкнутой?