ΨΩΣ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Котвицкий А.Т.

Тензорное исчисление

Харьков 2015

Содержание

Предисловие

ТЕНЗОРНАЯ АЛГЕБРА

1. Основные понятия и определения

1.1. Интуитивные рассуждения

Рассмотрим неортогональную систему координат, т.е. будем считать, что между координатными осями задан произвольный угол α (см. рис. 1). Это приведет к тому, что теперь мы можем определять координаты любой точки A двояким образом. В частности можно из точки A на ось абсцисс (ось x или x_1) опускать перпендикуляр, тогда получаем координату точки A обозначаемую x_1, или проводить прямую параллельную оси ординат (оси y или x_2), такую координату точки A обозначим как x^1.

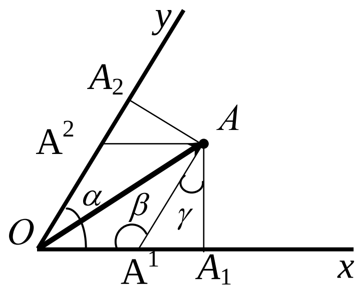

Рис.1

Аналогично можно получить и ординату точки A двумя способами. Т.о. мы имеем два набора чисел (A_1, A_2) и (A^1, A^2). Оба эти набора однозначно определяют положение точки A и между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Эти наборы имеют свое специфическое название, так набор (A_1, A_2) называется **ковариантными координатами**, а набор (A^1, A^2) – **контравариантными координатами**. Для того чтобы запомнить какие из координат как строятся дадим простое мнемоническое правило – так как в слове ковариантный меньше букв чем в слове контравариантный, то и отрезки опущенные из точки A на координатные оси имеют меньшую длину если они дают ковариантные координаты.

Заметим, что если координатные оси перпендикулярны друг другу, то эти координаты совпадают. Так как $\beta = \pi - \alpha$, то, квадрат вектора $\overrightarrow{OA}$, в контравариантных координатах, записывается как

$$\overrightarrow{OA}^2 = (A^1)^2 + (A^2)^2 - 2A^1A^2\cos\beta = (A^1)^2 + (A^2)^2 + 2A^1A^2\cos\alpha . \qquad (1.1)$$

Для установления связи между ковариантными и контравариантными координатами заметим, что $A_1 = A^1 + A^2\cos\alpha$, а также $A_2 = A^2 + A^1\cos\alpha$. Таким образом, зная контравариантные координаты (A^1, A^2) мы можем найти ковариантные координаты (A_1, A_2)

$$\begin{cases} A_1 = A^1 + A^2\cos\alpha \\ A_2 = A^2 + A^1\cos\alpha \end{cases}. \tag{1.2}$$

Выразим квадрат вектора $\overrightarrow{OA}$ в ковариантных координатах, для этого умножим первое выражение в (1.2) на $\cos\alpha$ и вычтем из первого второе

$$A_1\cos\alpha - A_2 = A^1\cos\alpha + A^2\cos^2\alpha - (A^2 + A^1\cos\alpha).$$

Тогда $A_2 - A_1\cos\alpha = A^2 - A^2\cos^2\alpha$, следовательно

$$A^2 = (A_2 - A_1\cos\alpha)/\sin^2\alpha.$$

Аналогично, умножая второе выражение в (1.2) на $\cos\alpha$ и вычитая из первого второе, получаем $A_1 - A_2\cos\alpha = A^1 - A^1\cos^2\alpha$. Т.о. решая (1.2) относительно (A^1, A^2) получаем

$$\begin{cases} A^1 = \dfrac{A_1 - A_2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\ A^2 = \dfrac{A_2 - A_1\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \end{cases}. \tag{1.3}$$

Подставляя теперь (1.3) в (1.1) получим выражение для квадрата вектора в ковариантных координатах

$$\overrightarrow{OA}^2 = \left(\frac{A_1 - A_2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)^2 + \left(\frac{A_2 - A_1\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)^2 + 2\frac{(A_1 - A_2\cos\alpha)(A_2 - A_1\cos\alpha)}{\sin^4\alpha}\cos\alpha =$$

$$= \frac{1}{\sin^4\alpha}\Big((A_1)^2 - 2A_1A_2\cos\alpha + (A_2)^2\cos^2\alpha + (A_2)^2 - 2A_1A_2\cos\alpha + (A_1)^2\cos^2\alpha +$$

$$+2\cos\alpha(A_1A_2 - (A_1)^2\cos\alpha - (A_2)^2\cos\alpha + A_2A_1\cos^2\alpha)\Big) =$$

$$= \frac{1}{\sin^4\alpha}\Big((A_1)^2(1-\cos^2\alpha) + (A_2)^2(1-\cos^2\alpha) - 2A_1A_2\cos\alpha(1-\cos^2\alpha)\Big).$$

Окончательно получаем

$$\overrightarrow{OA}^2 = \frac{(A_1)^2}{\sin^2\alpha} + \frac{(A_2)^2}{\sin^2\alpha} - \frac{2A_1A_2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}. \tag{1.4}$$

Попробуем получить более простую формулу для квадрата вектора $\overrightarrow{OA}$, чем (1.1) и (1.4). Для этого перепишем (1.1) следующим образом

$$\overrightarrow{OA}^2 = A^1A^1 + A^2A^2 + A^1A^2\cos\alpha + A^1A^2\cos\alpha,$$

объединим 1-е и 3-е слагаемые и 2-е и 4-е

$$\overrightarrow{OA}^2 = A^1\left(A^1 + A^2\cos\alpha\right) + A^2\left(A^2 + A^1\cos\alpha\right).$$

Учитывая (1.2), получаем выражение для квадрата вектора

$$\overrightarrow{OA}^2 = A^1A_1 + A^2A_2. \tag{1.5}$$

Введем следующие обозначения

$$g_{11} = g_{22} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = \cos\alpha; \tag{1.6}$$

а также

$$g^{11} = g^{22} = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad g^{12} = g^{21} = \frac{-\cos\alpha}{\sin^2\alpha}. \tag{1.7}$$

Тогда выражения (1.1) и (1.4) принимают вид

$$\overrightarrow{OA}^2 = g_{11}A^1A^1 + g_{12}A^1A^2 + g_{21}A^2A^1 + g_{22}A^2A^2, \tag{1.8}$$

$$\overrightarrow{OA}^2 = g^{11}A_1A_1 + g^{12}A_1A_2 + g^{21}A_2A_1 + g^{22}A_2A_2. \tag{1.9}$$

Используя правило Эйнштейна (**<u>по дважды повторяющимся индексам предполагается суммирование</u>**) эти выражения можно переписать в индексном виде

$$\overrightarrow{OA}^2 = g_{ij}A^iA^j = g^{ij}A_iA_j = A^iA_i, \tag{1.10}$$

где последняя запись соответствует формуле (1.5).

Из формулы (1.10) можно увидеть, что $(g^{ij}A_j)A_i = (A^i)A_i$, а также $A^i(g_{ij}A^j) = A^i(A_i)$. Фактически это означает, что выражения в скобках можно приравнять и получить

$$A^i = g^{ij}A_j, \tag{1.11}$$

$$A_i = g_{ij}A^j. \tag{1.12}$$

Выражение (1.11) называется **<u>операцией поднятия индекса</u>**, а выражение (1.12) **<u>операцией опускания индекса</u>**. В этих двух формулах также используется правило суммирования Эйнштейна, а значит (1.11) можно расписать как

$$\begin{cases} A^1 = g^{1j}A_j = g^{11}A_1 + g^{12}A_2 = \dfrac{A_1}{\sin^2\alpha} - \dfrac{A_2\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \\ A^2 = g^{2j}A_j = g^{21}A_1 + g^{22}A_2 = \dfrac{-A_1\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \dfrac{A_2}{\sin^2\alpha} \end{cases}.$$

Видно, что мы получили систему (1.3). Расписывая, (1.12) мы получаем

$$\begin{cases} A_1 = g_{1j}A^j = g_{11}A^1 + g_{12}A^2 = A^1 + A^2\cos\alpha \\ A_2 = g_{2j}A^j = g_{21}A^1 + g_{22}A^2 = A^1\cos\alpha + A^2 \end{cases}.$$

Т.е. выражение (1.2).

Нетрудно заметить, что между матрицами g_{ij} и g^{ij} существует связь

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/\sin^2\alpha & -\cos\alpha/\sin^2\alpha \\ -\cos\alpha/\sin^2\alpha & 1/\sin^2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т.е. эти матрицы являются взаимно обратными.

Данное выражение можно записать в индексном виде следующим образом

$$g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k. \tag{1.13}$$

Где мы ввели так называемый **<u>символ Кронекера</u>**, который равен единице, если индексы совпадают и нулю, если они разные, т.е.

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}. \qquad (1.14)$$

В справедливости (1.13) можно убедиться прямым вычислением, например для компонент (1,1) и (1,2) получаем

$$g_{1j}g^{j1} = g_{11}g^{11} + g_{12}g^{21} = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \cos\alpha\frac{-\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = 1 = \delta_1^1,$$

$$g_{1j}g^{j2} = g_{11}g^{12} + g_{12}g^{22} = \frac{-\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \cos\alpha\frac{1}{\sin^2\alpha} = 0 = \delta_1^2.$$

Легко проверить справедливость (1.13) и для других компонент.

Символ g_{ij} называется **дважды ковариантным метрическим тензором**, а g^{ij} – **дважды контравариантным метрическим тензором**.

Подчеркнем здесь следующее. Если индекс пишется внизу, он называется *ковариантным*, если вверху – *контравариантным*. Слово дважды означает просто тот факт, что таких индексов два, количество индексов определяет ранг тензора. Т.е. если некоторый объект не несет ни одного индекса, то это есть тензор нулевого ранга, если индекс один, то – тензор первого ранга, два – второго ранга и так далее. Обратим внимание на то, что такое определение не совсем корректно и требует уточнения, однако на первом этапе знакомства нам этого определения вполне хватит.

Сформулируем некоторые правила индексной записи формул (баланс индексов):

1) *в любом тензорном выражении, каждое слагаемое может содержать какой-либо индекс либо один, либо два раза;*
2) *индекс, встречающийся один раз, называется* ***говорящим****;*
3) *индекс, встречающийся два раза, называется* ***немым*** *и по нему происходит суммирование;*
4) *в каждом слагаемом количество и обозначение немых индексов может быть любым;*
5) *в каждом слагаемом количество и обозначение говорящих индексов обязано совпадать.*

1.2. Простейшие примеры преобразования тензоров

1.2.1. Преобразование базисных векторов.

Рассмотрим произвольную систему координат x^i и перейдем к новой системе координат $x^{i'}$. Тогда базисные векторы $\vec{e}_1^{\,\prime}$ и $\vec{e}_2^{\,\prime}$ новой системы координат (см. рис. 2) имеют, в старой системе, следующие координаты:

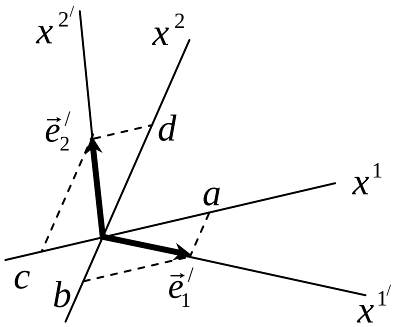

Рис. 2

$$\vec{e}_1^{\,\prime} = (a,b); \quad \vec{e}_2^{\,\prime} = (c,d).$$

Иначе это можно записать как

$$\begin{cases} \vec{e}_1^{\,\prime} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2^{\,\prime} = c\vec{e}_1 + d\vec{e}_2 \end{cases}, \tag{2.1}$$

где $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ – базисные векторы старой системы координат. Отметим, что мы считаем, что между базисными векторами может изменяться, как и угол, так и их длина. Запишем выражение (2.1) в индексном виде следующим образом

$$\vec{e}_{i'} = \tau^k_{i'}\vec{e}_k, \tag{2.2}$$

здесь мы поставили над новым индексом i штрих. Для того чтобы понять, какие значения принимает матрица $\tau^k_{i'}$ распишем (2.2) по компонентам

$$\begin{cases} \vec{e}_{1'} = \tau^1_{1'}\vec{e}_1 + \tau^2_{1'}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_{2'} = \tau^1_{2'}\vec{e}_1 + \tau^2_{2'}\vec{e}_2 \end{cases}. \tag{2.3}$$

Сравнивая (2.3) и (2.1), видим, что

$$\begin{matrix} \tau^1_{1'} = a & \tau^2_{1'} = b \\ \tau^1_{2'} = c & \tau^2_{2'} = d \end{matrix}.$$

Совершенно аналогично можно выразить старые базисные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ через новые

$$\vec{e}_k = \lambda^{j'}_k \vec{e}_{j'}, \tag{2.4}$$

где матрица $\lambda^{j'}_k$ является пока неизвестной. Чтобы найти связь между матрицами $\lambda^{j'}_k$ и $\tau^k_{i'}$ подставим в правую часть (2.2) выражение (2.4), тогда

$$\vec{e}_{i'} = \tau_{i'}^{k}\vec{e}_{k} = \tau_{i'}^{k}\lambda_{k}^{j'}\vec{e}_{j'}.$$

Отсюда видно, что

$$\vec{e}_{i'} - \tau_{i'}^{k}\lambda_{k}^{j'}\vec{e}_{j'} = 0.$$

Используя символ Кронекера можно записать что $\vec{e}_{i'} = \vec{e}_{j'}\delta_{i'}^{j'}$, тогда

$$\vec{e}_{i'} - \tau_{i'}^{k}\lambda_{k}^{j'}\vec{e}_{j'} = \vec{e}_{j'}\delta_{i'}^{j'} - \tau_{i'}^{k}\lambda_{k}^{j'}\vec{e}_{j'} = \vec{e}_{j'}\left(\delta_{i'}^{j'} - \tau_{i'}^{k}\lambda_{k}^{j'}\right) = 0.$$

Так как базисные векторы являются линейно независимыми, то равна нулю круглая скобка или

$$\tau_{i'}^{k}\lambda_{k}^{j'} = \delta_{i'}^{j'}. \tag{2.5}$$

Можно получить еще одну формулу, связывающую матрицы $\lambda_{k}^{j'}$ и $\tau_{i'}^{k}$ для этого подставим в выражение (2.4) формулу (2.2). Тогда получаем

$$\vec{e}_{k} = \lambda_{k}^{j'}\vec{e}_{j'} = \lambda_{k}^{j'}\tau_{j'}^{i}\vec{e}_{i}.$$

И по аналогии с предыдущими вычислениями имеем

$$\vec{e}_{k} - \lambda_{k}^{j'}\tau_{j'}^{i}\vec{e}_{i} = \vec{e}_{i}\delta_{k}^{i} - \lambda_{k}^{j'}\tau_{j'}^{i}\vec{e}_{i} = \vec{e}_{i}\left(\delta_{k}^{i} - \lambda_{k}^{j'}\tau_{j'}^{i}\right) = 0.$$

Приравнивая нулю круглую скобку, получаем соотношение

$$\lambda_{k}^{j'}\tau_{j'}^{i} = \delta_{k}^{i}. \tag{2.6}$$

Следует подчеркнуть тот факт, что выражения (2.6) и (2.5) являются разными, так как в (2.5) суммирование происходит по старым (не штрихованным) индексам, а в (2.6) – по новым. Из этих двух соотношений следует, что матрицы $\lambda_{k}^{j'}$ и $\tau_{i'}^{k}$ являются взаимно обратными.

1.2.2. Преобразование контравариантных координат

Любой вектор $\vec{r}$ можно разложить как по базису $\vec{e}_i$, так и по базису $\vec{e}_{i'}$. Это значит, что вектор можно представить как

$$\vec{A} = A^{i}\vec{e}_{i}, \tag{2.7}$$

$$\vec{A} = A^{k'}\vec{e}_{k'}, \tag{2.8}$$

где A^{i} и $A^{k'}$ – координаты вектора $\vec{r}$ в старой (не штрихованной) и новой (штрихованной) системах координат соответственно. Найдем связь между этими координатами для этого подставим в (2.7) выражение (2.4)

$$\vec{A} = A^{i}\vec{e}_{i} = A^{i}\lambda_{i}^{k'}\vec{e}_{k'},$$

но, с другой стороны, это же выражение равно (2.8), так как вектор один и тот же, следовательно

$$A^i \lambda_i^{k'} \vec{e}_{k'} = A^{k'} \vec{e}_{k'} .$$

Отсюда следует связь между старыми координатами A^i и новыми $A^{k'}$

$$A^{k'} = A^i \lambda_i^{k'} . \qquad (2.9)$$

Обратим внимание на то, что формула (2.2) говорит нам, что для того чтобы перейти от старых базисных векторов к новым необходимо знать матрицу $\tau_{i'}^{k}$, а для того чтобы найти новые координаты произвольного вектора по старым необходима обратная матрица $\lambda_k^{j'}$.

Умножим (2.9) на $\tau_{k'}^{j}$ тогда получим

$$\tau_{k'}^{j} A^{k'} = \tau_{k'}^{j} A^i \lambda_i^{k'} .$$

Правая часть этого выражения дает $\tau_{k'}^{j} A^i \lambda_i^{k'} = A^i \tau_{k'}^{j} \lambda_i^{k'} = A^i \delta_i^j = A^j$.

И окончательно получаем

$$A^j = \tau_{k'}^{j} A^{k'} . \qquad (2.10)$$

Эта формула является обратной к (2.9) и позволяет от новых координат $A^{k'}$ перейти к старым A^i.

1.2.3. Преобразование дважды ковариантного метрического тензора

Рассмотрим квадрат вектора $\vec{A}$

$$r^2 \equiv \left(\vec{A}, \vec{A}\right) = \left(A^i \vec{e}_i, A^j \vec{e}_j\right) = A^i A^j \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) .$$

Сравнивая эту формулу с (1.10) нам необходимо ввести обозначение

$$g_{ij} = \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right), \qquad (2.11)$$

где g_{ij} есть **фундаментальный метрический тензор**, а круглые скобки означают скалярное произведение векторов.

Таким образом

$$r^2 = g_{ij} A^i A^j . \qquad (2.12)$$

Аналогичное выражение можно получить и в новой системе координат x'

$$r^2 \equiv \left(\vec{r}, \vec{r}\right) = \left(A^{i'} \vec{e}_{i'}, A^{j'} \vec{e}_{j'}\right) = A^{i'} A^{j'} \left(\vec{e}_{i'}, \vec{e}_{j'}\right) = A^{i'} A^{j'} g_{i'j'} , \qquad (2.13)$$

где $g_{i'j'}$ фундаментальный метрический тензор в системе координат x'.

Найдем закон преобразования метрического тензора, т.е. как, зная g_{ij} найти $g_{i'j'}$. Учитывая (2.12) и (2.13) имеем

$$g_{ij}A^iA^j = g_{i'j'}A^{i'}A^{j'},$$

а воспользовавшись (2.10) получим

$$g_{ij}\tau^i_{k'}\tau^j_{l'}A^{k'}A^{l'} = g_{k'l'}A^{k'}A^{l'}.$$

Т.о.

$$\left(g_{ij}\tau^i_{k'}\tau^j_{l'} - g_{k'l'}\right)A^{k'}A^{l'} = 0.$$

Так как в общем случае $A^{i'} \neq 0$, следовательно

$$g_{k'l'} = g_{ij}\tau^i_{k'}\tau^j_{l'}. \tag{2.14}$$

1.2.4. Преобразование ковариантных координат

Для того чтобы определить ковариантные координаты введем базисные ковекторы $\vec{e}^{\,i}$ по правилу

$$\left(\vec{e}_i, \vec{e}^{\,j}\right) = \delta_i^j. \tag{2.15}$$

Т.е. любой вектор $\vec{r}$ можно разложить как по базисным векторам $\vec{r} = A^i\vec{e}_i$, так и по базисным ковекторам $\vec{r} = A_i\vec{e}^{\,i}$. Числа A_i – называются ковариантными координатами.

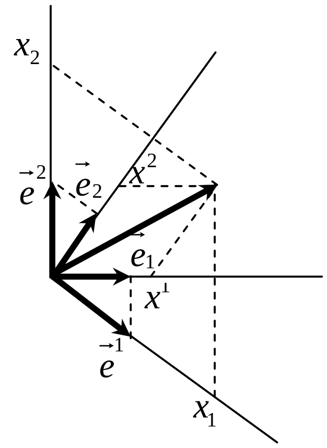

Рис.

Так как базис $\vec{e}^{\,i}$ связан с базисом $\vec{e}_i$ по формуле (2.15), то $\vec{e}_1 \perp \vec{e}^{\,2}$ и $\vec{e}_2 \perp \vec{e}^{\,1}$, тогда (см. рис. 3) имеем

$$\vec{r} = A^1\vec{e}_1 + A^2\vec{e}_2, \quad \vec{r} = A_1\vec{e}^{\,1} + A_2\vec{e}^{\,2}.$$

Таким образом

$$A^i\vec{e}_i = A_i\vec{e}^{\,i}. \tag{2.16}$$

Умножим это выражение скалярно на $\vec{e}_j$

$$A^i(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = A_i(\vec{e}^{\,i}, \vec{e}_j).$$

Тогда $A^i g_{ij} = A_i\delta^i_j$, см. (2.11) и (2.15), а значит

$$A^i g_{ij} = A_j. \tag{2.17}$$

Т.е. зная ковариантный метрический тензор можно контравариантным координатам x^i поставить в соответствие ковариантные координаты x_j. Сравните рис. 3 и рис. 1.

Умножая выражение (2.16) скалярно на $\vec{e}^{\,j}$ получим

$$A^i(\vec{e}_i,\vec{e}^{\,j}) = A_i(\vec{e}^{\,i},\vec{e}^{\,j}).$$

И, следовательно

$$A^i\delta_i^j = A_i g^{ij},$$

где по аналогии с (2.11) введен дважды контравариантный метрический тензор

$$g^{ij} \equiv (\vec{e}^{\,i},\vec{e}^{\,j}). \qquad (2.18)$$

Таким образом

$$A^j = g^{ij}A_i. \qquad (2.19)$$

Заметим, что согласно (2.11) и (2.18) как ковариантный, так и контравариантный метрический тензор является симметричным.

Выясним, как связаны g^{ij} и g_{ij}. Для этого в (2.17) подставим выражение (2.19), получаем

$$A_j = g_{ij}A^i = g_{ij}g^{ik}A_k.$$

Отсюда следует, что

$$A_j - g^{ik}g_{ij}A_k = \delta_j^k A_k - g^{ik}g_{ij}A_k = A_k\left(\delta_j^k - g^{ik}g_{ij}\right) = 0.$$

Окончательно имеем

$$g^{ik}g_{ij} = \delta_j^k. \qquad (2.20)$$

Т.е. мы из общих соображений показали справедливость (1.13).
После подготовительных рассуждений мы готовы найти закон преобразования ковариантных координат. Для этого вычислим квадрат произвольного вектора в старой системе координат x

$$r^2 = \left|\vec{r}^{\,2}\right| = \left(\vec{r},\vec{r}\right) = \left(A^i\vec{e}_i, A_j\vec{e}^{\,j}\right) = A^iA_j\left(\vec{e}_i,\vec{e}^{\,j}\right) = A^iA_j\delta_i^j = A^iA_i$$

и в новой системе координат $x^{/}$

$$r^2 = \left|\vec{r}^{\,2}\right| = \left(\vec{r},\vec{r}\right) = \left(A^{i^/}\vec{e}_{i^/}, A_{j^/}\vec{e}^{\,j^/}\right) = A^{i^/}A_{j^/}\left(\vec{e}_{i^/},\vec{e}^{\,j^/}\right) = A^{i^/}A_{j^/}\delta_{i^/}^{j^/} = A^{i^/}A_{i^/}.$$

Таким образом

$$A^iA_i = A^{i^/}A_{i^/}.$$

Заменим x^i по формуле (2.10), тогда

$$\tau_{k^/}^i A^{k^/}A_i = A^{i^/}A_{i^/}.$$

Поменяем немой индекс $i^/$ справа на $k^/$ и перенесем правую часть влево, следовательно

$$\tau_{k'}^{i} A_i A^{k'} - A_{k'} A^{k'} = \left(\tau_{k'}^{i} A_i - A_{k'}\right) A^{k'} = 0.$$

Так как это выражение должно быть справедливо при любых значениях $A^{k'}$, то

$$A_{k'} = \tau_{k'}^{i} A_i. \qquad (2.21)$$

Формула (2.21) дает правило перехода ковариантных координат из старой системы x в новую x'.

Обратная формула получается умножением (2.21) на $\lambda_j^{k'}$. Тогда имеем

$$\lambda_j^{k'} A_{k'} = \lambda_j^{k'} \tau_{k'}^{i} A_i.$$

С учетом (2.6) получаем $\lambda_j^{k'} \tau_{k'}^{i} A_i = \delta_j^i A_i = A_j$ и окончательно

$$A_j = \lambda_j^{k'} A_{k'}. \qquad (2.22)$$

1.2.5. Преобразование контравариантного метрического тензора

Теперь можно определить, как преобразуются компоненты тензора g^{ij}.

Т.к. $r^2 = \left|\vec{r}^{\,2}\right| = \left(\vec{r}, \vec{r}\right) = \left(A_i \vec{e}^{\,i}, A_j \vec{e}^{\,j}\right) = A_i A_j \left(\vec{e}^{\,i}, \vec{e}^{\,j}\right) = A^i A^j g_{ij}$, то в старой и новой системах координат мы можем написать

$$r^2 = g^{ij} A_i A_j = g^{i'j'} A_{i'} A_{j'}.$$

Воспользовавшись формулой (2.22), получаем

$$g^{ij} \lambda_i^{k'} A_{k'} \lambda_j^{l'} A_{l'} = g^{i'j'} A_{i'} A_{j'}.$$

Заменяя немые индексы $i', j' \to k', l'$ имеем

$$g^{ij} \lambda_i^{k'} A_{k'} \lambda_j^{l'} A_{l'} - g^{k'l'} A_{k'} A_{l'} = \left(g^{ij} \lambda_i^{k'} \lambda_j^{l'} - g^{k'l'}\right) A_{k'} A_{l'} = 0.$$

Так эта формула справедлива для любых значений координат, то

$$g^{k'l'} = \lambda_i^{k'} \lambda_j^{l'} g^{ij}. \qquad (2.23)$$

Эта формула позволяет нам перейти от значений компонент контравариантного метрического тензора в старой системе координат к новым значениям.

1.2.6. Преобразование тензора с ковариантными и контравариантными компонентами

Определим в векторном пространстве оператор T, который переводит вектор $\vec{A}$ в вектор $\vec{B}$ т.е.

$$\vec{B} = T\vec{A}.$$

Эту матричную запись можно записать в индексных обозначениях

$$B^i = T^i_k A^k. \qquad (2.24)$$

В любой другой системе координат $x^{/}$ это выражение должно иметь вид

$$B^{i^/} = T^{i^/}_{k^/} A^{k^/}. \qquad (2.25)$$

Перепишем (2.24), используя (2.10)

$$\tau^i_{j^/} B^{j^/} = T^i_k \tau^k_{l^/} A^{l^/}.$$

Умножая это выражение на $\lambda^{m^/}_i$ получаем

$$\lambda^{m^/}_i \tau^i_{j^/} B^{j^/} = \lambda^{m^/}_i T^i_k \tau^k_{l^/} A^{l^/}.$$

Учитывая то, что $\lambda^{m^/}_i \tau^i_{j^/} = \delta^{m^/}_{j^/}$ см. (2.5) имеем

$$B^{m^/} = T^i_k \lambda^{m^/}_i \tau^k_{l^/} A^{l^/}.$$

Сравним это выражение с (2.25), но для этого перепишем его в виде $B^{m^/} = T^{m^/}_{l^/} A^{l^/}$, следовательно

$$T^{m^/}_{l^/} A^{l^/} = T^i_k \lambda^{m^/}_i \tau^k_{l^/} A^{l^/}.$$

Отсюда следует, что $\left(T^{m^/}_{l^/} - T^i_k \lambda^{m^/}_i \tau^k_{l^/}\right) A^{l^/} = 0$. Так как это выражение должно быть справедливо для любых значений, то

$$T^{m^/}_{l^/} = T^i_k \lambda^{m^/}_i \tau^k_{l^/}. \qquad (2.26)$$

Это и есть формула для перехода от $T^i_k \to T^{i^/}_{k^/}$.

1.2.7 Преобразование базисных ковекторов.

Найдем теперь преобразование базисных ковекторов и $\vec{e}^{\,i}$. В пункте 1.2.1. мы нашли, что $\vec{e}_{i'} = \tau_{i'}^{k}\vec{e}_k$ и $\vec{e}_k = \lambda_k^{j'}\vec{e}_{j'}$, формулы (2.2) и (2.4) соответственно. Так как $(\vec{e}_i, \vec{e}^{\,j}) = \delta_i^j$, то в произвольной, штрихованной системе координат должно выполняться соотношение $(\vec{e}_{i'}, \vec{e}^{\,j'}) = \delta_{i'}^{j'}$.

Предположим, что $\vec{e}^{\,i'} = \chi_k^{i'}\vec{e}^{\,k}$,где $\chi_k^{i'}$ - неизвестная матрица, тогда

$$(\vec{e}_{i'}, \vec{e}^{\,j'}) = (\tau_{i'}^{k}\vec{e}_k, \chi_l^{j'}\vec{e}^{\,l}) = \tau_{i'}^{k}\chi_l^{j'}(\vec{e}_k, \vec{e}^{\,l}) = \tau_{i'}^{k}\chi_l^{j'}\delta_k^l = \tau_{i'}^{k}\chi_k^{j'}.$$

Учитывая (2.15), получаем, что $\tau_{i'}^{k}\chi_k^{j'} = \delta_{i'}^{j'}$. Сравнивая это выражение с (2.6) видим, что $\chi_k^{i'} = \lambda_k^{i'}$, таким образом

$$\vec{e}^{\,i'} = \lambda_k^{i'}\vec{e}^{\,k}. \qquad (2.27)$$

Нетрудно показать, что справедлива и обратная формула

$$\vec{e}^{\,i} = \tau_{k'}^{i}\vec{e}^{\,k'}. \qquad (2.28)$$

1.3. Определение тензора

В этом пункте мы обобщим некоторые понятия введенные в предыдущих разделах.

В общем случае при произвольном преобразовании координат из $x^i \to x^{i'}$ вычисляют матрицу преобразования

$$\partial x^{i'} \Big/ \partial x^k . \tag{3.1}$$

Т.о. заменяем $\tau^j_{l'} \to \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}$ и $\lambda^{k'}_i \to \dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^i}$

Обобщая (2.9) и (2.10) запишем закон преобразования для любого тензора с одним контравариантным индексом в виде

$$A^{k'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} A^i , \tag{3.2}$$

а также для тензора с одним ковариантным индексом

$$A_{k'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} A_i . \tag{3.3}$$

Произведем аналогичные обобщения и для других тензоров, так произвольный тензор с двумя ковариантными индексами T_{ij} согласно (2.14) будет преобразовываться по закону

$$T_{k'l'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{k'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} T_{ij} , \tag{3.4}$$

а дважды контравариантный тензор, согласно (2.23) как

$$T^{k'l'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^j} T^{ij} , \tag{3.5}$$

обобщение (2.26) даст закон преобразования для тензора один раз ковариантного и один раз контравариантного

$$T^{k'}_{l'} = \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}} T^i_j . \tag{3.6}$$

Будем говорить, что тензор принадлежит **типу (*p*,*q*)** если он имеет p – штук верхних индексов и q – нижних.

Теперь можно сделать последнее обобщение и объединить формулы (3.2) - (3.6) в одну. Таким образом, мы можем сформулировать следующее определение.

def Тензором (тензорным полем) типа (p,q) называется объект, задаваемый набором чисел

$$T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$$

в системе координат x^i, если при переходе к системе координат $x^{i'}$ эти числа преобразуются как

$$T^{k'_1 k'_2 \dots k'_p}_{l'_1 l'_2 \dots l'_q} = \frac{\partial x^{k'_1}}{\partial x^{i_1}} \frac{\partial x^{k'_2}}{\partial x^{i_2}} \dots \frac{\partial x^{k'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{l'_1}} \frac{\partial x^{j_2}}{\partial x^{l'_2}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{l'_q}} T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} . \qquad (3.7)$$

К этому определению необходимо сделать ряд комментариев. Мы будем, по возможности всегда, новые координаты обозначать со штрихом. Такое обозначение является очень удобным, потому что позволяет сформулировать очень простое эвристическое правило, так на каждый индекс необходимо «повесить» матрицу перехода $\partial x^{i'} / \partial x^k$, причем если индекс верхний, то матрица имеет верхний штрихованный индекс, если нижний, то индекс со штрихом в матрице перехода находится внизу.

Укажем одно очень простое следствие определения (3.7), так если тензор не несет на себе ни одного индекса (тензор нулевого ранга или скаляр), то в любой системе координат он имеет одно и тоже значение.

1.4. Алгебраические операции над тензорами

Рассмотрим некоторые операции, которые можно проводить над тензорами и которые оставляют эти объекты тензорами.

1.4.1 Сумма тензоров

Введем объект $C^{ab} \equiv A^{ab} + B^{ab}$, где A^{ab}, B^{ab} являются тензорами по определению. Тогда, очевидно, что C^{ab} тензор. Если мы рассмотрим формально другую сумму, то в законе преобразования тензоров $A^{ab}, B^{a}{}_{b}$ матрицы преобразования будут несколько отличаться друг от друга и вынести их за скобки не получиться. Это означает, что построенный таким образом объект D^{ab} не является тензором.

1.4.2 Умножение тензора на число

Сконструируем следующий объект $C^{ab} \equiv \lambda \cdot A^{ab}$, где A^{ab} - тензор. Тогда в законе преобразования эту константу можно вынести и мы получим, что C^{ab} также является тензором. Очевидно, что данные рассуждения не зависят от типа и количества индексов.

1.4.3 Перестановка индексов

Определим операцию перестановки индексов следующим образом. Перенумеруем q – индексов подряд, а затем заменим i-й индекс на $p(i)$, т.е.

$$(1,2,...q) \rightarrow \left(p(1), p(2),...p(q)\right),$$

тогда возникает новый объект

$$\left(pT\right)_{j_1 j_2 \dots j_q} \equiv T_{p(j_1 j_2 \dots j_q)}. \qquad (4.1)$$

является тензором. В этом выражении p это не индекс, а операция перестановки.

Докажем это утверждение для тензора второго ранга T_{ij}. По определению, см. (4.1)

$$\left(pT\right)_{ij} \equiv T_{ji},$$

тогда, используя формулу преобразования тензоров, имеем

$$\left(pT\right)_{ij} \equiv T_{ji} = T_{k'l'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i}.$$

Но, с другой стороны, $\left(pT\right)_{l'k'} \equiv T_{k'l'}$, тогда

$$\left(pT\right)_{ij} \equiv T_{ji} = \left(pT\right)_{l'k'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i} = \left(pT\right)_{l'k'} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j},$$

т.е. мы можем написать, что

$$\left(pT\right)_{ij} = \left(pT\right)_{l'k'} \frac{\partial x^{l'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^j}. \tag{4.2}$$

Это есть закон преобразования объекта pT_{ij}, но это тензорный закон преобразования, следовательно, $\left(pT\right)_{ij}$ – тензор.

Отметим сразу одно следствие, которое вытекает из возможности переставлять индексы. Эта операция позволяет определить **симметрирование** и **альтернирование** тензоров.

Так, для любого тензора второго ранга T_{ij} можно определить симметричный тензор

$$T_{(ij)} \equiv \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right), \tag{4.3}$$

т.е. $T_{(ij)} = T_{(ji)}$, а также антисимметричный тензор

$$T_{[ij]} \equiv \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right), \tag{4.4}$$

где $T_{[ij]} = -T_{[ji]}$.

Коэффициент 1/2 в формулах (4.3) и (4.4) не влияет на симметризацию или антисимметризацию индексов, но зато позволяет получить следующее соотношение

$$T_{(ij)} + T_{[ij]} \equiv \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(T_{ij} - T_{ji}\right) = \frac{1}{2}\left(T_{ij} + T_{ij} + T_{ji} - T_{ji}\right) = T_{ij}.$$

По аналогии, можно ввести и симметричный и антисимметричный тензоры по трем индексам. Для этого составим следующую таблицу

$$\begin{pmatrix} ijk & kij & jki \\ ikj & kji & jik \end{pmatrix},$$

где мы на первое место поставили вначале *i* потом *j*, затем *k*. Тогда

$$T_{(ijk)} \equiv \frac{1}{3!}\left(T_{ijk} + T_{ikj} + T_{jki} + T_{jik} + T_{kij} + T_{kji}\right), \tag{4.5}$$

а также полностью антисимметричный тензор

$$T_{[ijk]} \equiv \frac{1}{3!}\left(T_{ijk} - T_{ikj} + T_{jki} - T_{jik} + T_{kij} - T_{kji}\right). \qquad (4.6)$$

Для тензора третьего ранга

$$T_{ijk} \neq T_{(ijk)} + T_{[ijk]},$$

в общем случае, однако, коэффициент 1/3! служит для того, что если искомый тензор T_{ijk} является симметричным сам по себе, то тогда эти два $T_{ijk} = T_{(ijk)}$ определения совпадают. Аналогичная ситуация наблюдается и в случае полностью антисимметричного тензора.

Обратим внимание на то, что переставлять можно только верхние индексы с верхними, а нижние с нижними, перестановка верхних индексов с нижними не является тензорной операцией. Докажем это утверждение в случае один раз ковариантного и один раз контравариантного тензора T^i_j.

Определим объект $\left(pT\right)^i_j \equiv T_i^{\ j}$, так как $T_i^{\ j} = T^{l'}_{k'} \dfrac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}$, так как $\left(pT\right)^{k'}_{l'} \equiv T^{l'}_{k'}$, тогда

$$\left(pT\right)^i_j = \left(pT\right)^{k'}_{l'} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial x^{l'}}.$$

Этот закон преобразования не является тензорным, так как говорящий индекс i слева является верхним, а справа нижним, индекс j наоборот, слева нижний, а справа верхний, следовательно $\left(pT\right)^i_j$ – не есть тензор.

<u>1.4.2 Свертка индексов</u>

Определим операцию свертки как сумму по одному контравариантному (верхнему) и одному ковариантному (нижнему) индексам. Т.е. от тензора $T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$ переходим к объекту

$$\mathrm{sp}T^{\ i_2 \dots i_p}_{\ j_2 \dots j_q} \equiv T^{l i_2 \dots i_p}_{l j_2 \dots j_q} = \sum_l T^{l i_2 \dots i_p}_{l j_2 \dots j_q}, \qquad (4.7)$$

где символы <u>sp</u> означают след (шпур) тензора. Заметим, что в силу того, что операция перестановки индексов является тензорной все равно по каким индексам суммировать, по первым или по любым другим.

Основное наше утверждение состоит в том, что объект, определенный в (4.7) является тензором. Точнее тензор типа **(*p*,*q*)** в результате свертки переходит в тензор типа **(*p*-1,*q*-1)**.

Докажем это утверждение для тензора типа (1, 2). Тогда имеет место следующая цепочка рассуждений

$$T^i_{jk} \to T^i_{ik} \equiv \left(spT \right)_k .$$

Необходимо доказать, что введенный таким образом объект $\overset{\text{sp}}{T}_k$ является тензором, т.е. преобразуется как тензор. По определению в штрихованной системе координат мы имеем

$$\left(spT \right)_{k'} \equiv T^{i'}_{i'k'} .$$

Так как $T^{i'}_{j'k'}$ является тензором, то

$$T^{i'}_{i'k'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} T^l_{mn} .$$

По обычному правилу математического анализа

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^m}{\partial x^l} = \delta^m_l ,$$

а значит

$$\left(\text{sp} T \right)_{k'} \equiv T^{i'}_{i'k'} = \delta^m_l \frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} T^l_{mn} = \frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} T^l_{ln} \equiv \frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} \left(\text{sp} T \right)_n$$

Таким образом

$$\left(\text{sp} T \right)_{k'} = \frac{\partial x^n}{\partial x^{k'}} \left(\text{sp} T \right)_n , \tag{4.8}$$

а это есть закон преобразования для тензора типа (0, 1).

Чтобы лучше понять смысл этого доказательства приведем контр пример, т.е. из тензора T^i_{jk} построим нетензорный объект, свернем его по двум нижним индексам $\overset{\text{sp}}{T}{}^i \equiv T^i_{jj}$.

Аналогично выше приведенному рассуждению получаем

$$\overset{\text{sp}}{T}{}^{i'} \equiv T^{i'}_{j'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}} T^l_{mn} \neq \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^l} \overset{\text{sp}}{T}{}^l .$$

Таким образом, тензорного закона преобразования мы не получили, следовательно, этот объект не является тензором.

Сделаем одно замечание, очень часто символ sp при свертке опускается и пишется та же самая буква, т.е.

$$T^{i_2 \dots i_p}_{j_2 \dots j_q} \equiv T^{l i_2 \dots i_p}_{l j_2 \dots j_q}.$$

1.4.3 Тензорное перемножение

Два тензора, один из которых $T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q}$ имеет тип **(*p*,*q*)**, а другой $S^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_l}$ тип **(*k*,*l*)** можно перемножить тензорным образом и получить объект $M \equiv T \otimes S$, который является тензором типа **(*p*+*k*,*q*+*l*)**. В индексных обозначениях это выражение запишется в виде

$$M^{i_1 i_2 \dots i_p i_{p+1} i_{p+2} \dots i_{p+k}}_{j_1 j_2 \dots j_q j_{q+1} j_{q+2} \dots j_{q+l}} \equiv T^{i_1 i_2 \dots i_p}_{j_1 j_2 \dots j_q} \otimes S^{i_{p+1} i_{p+2} \dots i_{p+k}}_{j_{q+1} j_{q+2} \dots j_{q+l}}. \qquad (4.9)$$

Нетрудно доказать, что объект $M^{i_1 i_2 \dots i_p i_{p+1} i_{p+2} \dots i_{p+k}}_{j_1 j_2 \dots j_q j_{q+1} j_{q+2} \dots j_{q+l}}$ действительно является тензором типа **(*p*+*k*,*q*+*l*)**.

1.5. Примеры тензоров

1.5.1 Нулевой тензор

Если тензор равен нулю в одной системе координат, то он равен нулю в любой другой системе координат.

1.5.2 Вектор скорости

Рассмотрим вектор скорости при движении вдоль некоторой кривой

$$x^i = x^i(t). \tag{5.1}$$

Это означает, что в координатах $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ мы можем вычислить компоненты вектора скорости как

$$\vec{\mathrm{v}} = \left(\frac{dx^1}{dt}, \frac{dx^2}{dt}, \frac{dx^3}{dt}\right) = \left(\mathrm{v}^1, \mathrm{v}^2, \mathrm{v}^3\right).$$

При записи этой же кривой в других координатах $x^{i'}$ мы получим

$$\vec{\mathrm{v}}' = \left(\frac{dx^{1'}}{dt}, \frac{dx^{2'}}{dt}, \frac{dx^{3'}}{dt}\right) = \left(\mathrm{v}^{1'}, \mathrm{v}^{2'}, \mathrm{v}^{2'}\right).$$

Причем

$$\frac{dx^{i'}}{dt} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt},$$

следовательно

$$\mathrm{v}^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j}\mathrm{v}^j. \tag{5.2}$$

Таким образом, компоненты вектора скорости (при переходе из системы координат x в систему x') преобразуются как компоненты контравариантного вектора (это означает, что индекс необходимо писать вверху).

Заметим, что приведенные выше рассуждения относятся к тому случаю когда «новые» координаты зависят только от «старых» координат и не зависят от параметра параметризации (времени) *t*.

В силу закона преобразования тензора, формула (3.9), если все компоненты тензора равны нулю в одной системе координат, то они обязаны быть равны нулю и в любой другой системе. Из физических соображений ясно, что если мы перейдем в систему отсчета, движущуюся вместе с телом, то его скорость относительно нас будет равна нулю. Т.е. мы получили, что в данном случае скорость в одной системе отсчета является нулевой, а в другой ненулевой. Это означает, что относительно таких преобразований трехмерная скорость не является тензором. На самом деле вектором оказывается четырехмерная скорость, а формулами перехода из одной системы координат в другую являются формулы Лоренца.

1.5.3 Градиент

Рассмотрим в трехмерную скалярную функцию $f\left(x^1, x^2, x^3\right)$,

где x^i - декартова система координат.

$$grad\ f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3}\right) \equiv \left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right).$$

Из математического анализа известно что

$$\frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial f}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}.$$

Таким образом

$$\xi_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\xi_k. \tag{5.3}$$

Т.е. компоненты градиента функции (при переходе из системы координат x в систему x') преобразуются как компоненты ковариантного вектора (ковектора).

Приведенное выше доказательство того, что градиент функции является ковектором имеет несколько физических следствий. В частности так как, сила определяется

$$\vec{F} = -grad\,\mathrm{U}, \tag{5.4}$$

то она является ковектором.

Также ковектором является и импульс, который по определению есть производная по скорости от лагаранжиана

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}. \tag{5.5}$$

1.5.4 Символ Кронекера

Очень важным примером тензора является символ Кронекера, который определяется по формуле

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, \text{ если } i = j \\ 0, \text{ если } i \neq j \end{cases}. \tag{5.6}$$

Тогда в другой системе координат символ Кронекера можно определить как

$$\delta_{i'}^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{i'}},$$

тогда преобразовывая это выражение, получаем

$$\delta_{i'}^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{k}} \frac{\partial x^{l}}{\partial x^{i'}} \delta_{l}^{k}.$$

Отсюда видно, что символ Кронекера является тензором. Более того, этот тензор в любой системе координат является одним и тем же, так как

$$\delta_{i'}^{j'} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i}} = \delta_{i}^{j}.$$

1.5.5 Производная по направлению

Производная по направлению вектора ξ^i определяется как

$$\partial_{\xi} f \equiv \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i},$$

где f есть скалярная функция. Нетрудно показать, что это выражение является тензором нулевого ранга, т.е. скаляром. Для этого запишем данное выражение в штрихованной системе координат, а затем перейдем к старой системе. Т.о.

$$\partial_{\xi'} f' \equiv \xi^{i'} \frac{\partial f'}{\partial x^{i'}} = \xi^{i'} \frac{\partial f}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}} \xi^{j} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{i'}} \frac{\partial f}{\partial x^{k}}.$$

Где мы воспользовались теми фактами, что

1) f – скаляр, следовательно $f' \equiv f$;

2) ξ^i – вектор, следовательно $\xi^{i'} = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}} \xi^{j}$;

3) $\dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}$ – ковектор, следовательно $\dfrac{\partial}{\partial x^{i'}} = \dfrac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}} \dfrac{\partial}{\partial x^{j}}$.

Так как

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{j}} \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{i'}} = \frac{\partial x^{k}}{\partial x^{j}} = \delta_{j}^{k},$$

то

$$\partial_{\xi'} f' \equiv \delta_{j}^{k} \xi^{j} \frac{\partial f}{\partial x^{k}} = \xi^{k} \frac{\partial f}{\partial x^{k}} = \partial_{\xi} f.$$

Мы получили, что производная по направлению не изменяется при переходе к другой системе координат, следовательно, является скаляром (тензором нулевого ранга).

Если $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ... \overrightarrow{e_N}$ базис в пространстве векторов и координаты любого вектора $\overrightarrow{e_k}$ равны $\left(e_k\right)^i = \delta_k^i$, то производная функции f вдоль вектора $\overrightarrow{e_k}$ будет равна $\partial_{\overrightarrow{e_k}} f \equiv \delta_k^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i} = \dfrac{\partial f}{\partial x^k}$. Фактически это означает, что мы построили взаимнооднозначное соответствие между базисными векторами и дифференциальными операторами

$$\overrightarrow{e_1} \to \frac{\partial}{\partial x^1}, \overrightarrow{e_2} \to \frac{\partial}{\partial x^2}, ..., \overrightarrow{e_N} \to \frac{\partial}{\partial x^N}.$$

Тогда любому вектору $\vec{a}$ будет соответствовать дифференциальный оператор вида

$$\vec{a} \to a^1 \frac{\partial}{\partial x^1} + ... + a^N \frac{\partial}{\partial x^N} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

1.6. Задачи

1.6.1 Задачи на баланс индексов

Могут ли тензорные выражения иметь следующий вид

1) $A_{ij}^{kl} + B_{ij}^{klm} = C_{ij}^{klm}$.

2) $A_{ij}^{kl} + B_{mnp}^{rst} = C_{ijmnp}^{klrst}$.

3) $A_{ijmn}^{mknl} + B_{ij}^{kl} = C_{pji}^{klp}$.

4). $A_{ij}^{mm} + B_{ij} = C_{ijk}^{k}$.

5) $A_{ijp}^{klm} + B_{ijm}^{klp} = C_{ijp}^{klm}$.

1.6.2 Поднятие и опускание индексов

В некоторой системе координат тензор $T^{i}{}_{jk}$ имеет следующие компоненты

$$T^{1}{}_{11} = 1, T^{1}{}_{12} = -1, T^{1}{}_{21} = 2, T^{1}{}_{22} = 3,$$
$$T^{2}{}_{11} = -2, T^{2}{}_{12} = 1, T^{2}{}_{21} = 2, T^{2}{}_{22} = -1.$$

Найти компоненты следующих тензоров $T_{ijk}, T^{ijk}, T^{ij}{}_{k}, T_{i}{}^{j}{}_{k}, T_{i}{}^{jk}$, если дважды ковариантный метрический тензор имеет вид

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

1.6.3 Переход из одной системы координат в другую

1) Написать закон преобразования для тензоров типа: (3,1), (2,3), (3,2), (4,0), (0,5).

2) В системе координат x компоненты тензора T_{j}^{i} имеют вид

$$T_{1}^{1} = 0, T_{2}^{1} = 1, T_{1}^{2} = -1, T_{2}^{2} = 2.$$

Новые базисные векторы $\vec{e}_1^{\,/}, \vec{e}_2^{\,/}$ в старой системе координат выглядят следующим образом

$$\vec{e}_1^{\,/} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \vec{e}_2^{\,/} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

Найти компоненты тензора $T^{i^/}_{j^/}$ в новой системе координат, а также вычислить след (шпур) данного тензора в обеих системах.

3) В системе координат x компоненты тензора T_{ij} имеют вид

$$T_{11} = 2, T_{12} = -1, T_{21} = 0, T_{22} = 1.$$

Новые базисные векторы $\vec{e}_1^{\,/}, \vec{e}_2^{\,/}$ в старой системе координат выглядят следующим образом

$$\vec{e}_1^{\,/} = \left(\frac{1}{2}, 1\right), \vec{e}_2^{\,/} = (-1, 2).$$

Найти компоненты тензора $T_{i^/ j^/}$ в новой системе координат.

4) В системе координат x компоненты тензора T^{ij} имеют вид

$$T^{11} = 0, T^{12} = -1, T^{21} = 1, T^{22} = -2.$$

Новые базисные векторы $\vec{e}_1^{\,/}, \vec{e}_2^{\,/}$ в старой системе координат выглядят следующим образом

$$\vec{e}_1^{\,/} = (1, 1), \vec{e}_2^{\,/} = \left(1, -\frac{1}{2}\right).$$

Найти компоненты тензора $T^{i^/ j^/}$ в новой системе координат.

5) Декартовы координаты x и y связаны с криволинейными координатами u, v следующим образом

$$\begin{cases} u = \ln\sqrt{x^2 + y^2} \\ v = \operatorname{arctg}(y / x) \end{cases}.$$

Найти дважды ковариантный фундаментальный метрический тензор в *полярной* системе координат u, v.

6) Декартовы координаты x и y связаны с криволинейными координатами u, v следующим образом

$$\begin{cases} x = uv \\ y = \sqrt{(u^2 - 1)(1 - v^2)} \end{cases}.$$

Найти дважды ковариантный фундаментальный метрический тензор в <u>*эллиптической*</u> системе координат u, v.

7) Декартовы координаты x и y связаны с криволинейными координатами u, v следующим образом

$$\begin{cases} x = \sqrt{uv} \\ y = \dfrac{1}{2}(u - v) \end{cases}.$$

Найти дважды ковариантный фундаментальный метрический тензор в <u>*параболической*</u> системе координат u, v.

8) Декартовы координаты x и y связаны с криволинейными координатами u, v следующим образом

$$\begin{cases} u = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} + x} \\ v = \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x} \end{cases}.$$

Найти дважды ковариантный фундаментальный метрический тензор в <u>*параболической*</u> системе координат u, v.

9) Декартовы координаты x и y связаны с криволинейными координатами u, v следующим образом

$$\begin{cases} x = \sin u \cdot \operatorname{ch} v \\ y = \cos u \cdot \operatorname{sh} v \end{cases}.$$

Найти дважды ковариантный фундаментальный метрический тензор в <u>*эллиптической*</u> системе координат u, v.

10) Декартовы координаты x, y, z связаны с цилиндрическими координатами ρ, φ, z следующим образом

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}.$$

Найти дважды ковариантный фундаментальный метрический тензор в системе координат ρ, φ, z.

11) Декартовы координаты x, y, z связаны со сферическим координатами r, ϑ, φ следующим образом

$$\begin{cases} x = r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\vartheta \end{cases}.$$

Найти дважды ковариантный фундаментальный метрический тензор в системе координат r, ϑ, φ.

1.6.4 Проверка на тензорность

1) Пусть $f(x^1,...x^n)$ - скалярная функция, а a^i - вектор (контравариантный тензор). Является ли выражение $T \equiv a^i \dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ тензором?

2) Пусть a_i - ковектор (ковариантный тензор). Является ли выражение $a_{i,j} \equiv \dfrac{\partial a_i}{\partial x^j}$ тензором?

3) Пусть a_i - ковектор (ковариантный тензор). Является ли выражение $b_{i,j} \equiv a_{[i,j]} \equiv \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial a_i}{\partial x^j} - \dfrac{\partial a_j}{\partial x^i}\right)$ тензором?

4) Пусть a^i - вектор (контравариантный тензор). Является ли выражение $b \equiv \dfrac{\partial a^i}{\partial x^i}$ - тензором?

5) Пусть ξ^i, η^i - векторы. Является ли выражение $b^i \equiv \xi^j \dfrac{\partial \eta^i}{\partial x^j} - \eta^j \dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \equiv \xi^j \eta^i{}_{,j} - \eta^j \xi^i{}_{,j}$ тензором?

6) Пусть ξ^i, η_i - тензоры. Является ли выражение $b_i \equiv \xi^j \dfrac{\partial \eta_i}{\partial x^j} + \eta_j \dfrac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \equiv \xi^j \eta_{i,j} + \eta_j \xi^j{}_{,i}$ тензором?

7) Пусть ξ^i, T_{ij} - тензоры. Является ли выражение $b_{jk} \equiv \xi^i \dfrac{\partial T_{jk}}{\partial x^i} + T_{ik} \dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^j} + T_{ji} \dfrac{\partial \xi^i}{\partial x^k} \equiv \xi^i T_{jk,i} + T_{ik}\xi^i{}_{,j} + T_{ji}\xi^i{}_{,k}$ тензором?

8) Пусть A_{ij} антисимметричный тензор. Доказать, что выражение
$T_{ijk} \equiv \frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial A_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i} \equiv A_{ij},_k + A_{ki},_j + A_{jk},_i$ является тензором.

9) Пусть ξ^i, T^j_k - тензоры. Является ли выражение
$b^j_k \equiv \xi^i \frac{\partial T^j{}_k}{\partial x^i} + T^j{}_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x^k} - T^i{}_k \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \equiv \xi^i T^j{}_k,_i + T^j{}_i \xi^i,_k - T^i{}_k \xi^j,_i$
тензором?

10) Пусть ξ^i, T^{jk} - тензоры. Является ли выражение
$b^{jk} \equiv \xi^i \frac{\partial T^{jk}}{\partial x^i} - T^{ik} \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} - T^{ji} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} \equiv \xi^i T^{jk},_i - T^{ik} \xi^j,_i - T^{ji} \xi^k,_i$
тензором?

1.6.5 Примеры решений

Ответы к пункту 1.6.1

1) В выражении $A^{kl}_{ij} + B^{klm}_{ij} = C^{klm}_{ij}$ не выполняется баланс индексов, т.к. говорящий индекс *m* отсутствует в первом слагаемом.
2) Баланс индексов не выполняется.
3) Баланс индексов выполняется.
4) Выражение не является тензорным, так как происходит свертка (суммирование) по верхним индексам.
5) Баланс индексов не выполняется.

Ответы к пункту 1.6.2

В некоторой системе координат тензор $T^i{}_{jk}$ имеет следующие компоненты

$$T^1{}_{11} = 1, T^1{}_{12} = -1, T^1{}_{21} = 2, T^1{}_{22} = 3,$$
$$T^2{}_{11} = -2, T^2{}_{12} = 1, T^2{}_{21} = 2, T^2{}_{22} = -1.$$

Найдем компоненты $T^{ij}{}_k$, если дважды ковариантный метрический тензор имеет вид

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Запишем формулу перехода от $T^i{}_{jk}$ к $T^{ij}{}_k$

$$T^{ij}{}_{k} = g^{jm} T^{i}{}_{mk}.$$

Т.о. необходимо найти контравариантный метрический тензор g^{jm} матрица которого является обратной g_{jm}. Обратная матрица определяется как

$$G^{-1} = \frac{1}{\det G} \begin{pmatrix} \mathcal{g}_{11} & \mathcal{g}_{21} \\ \mathcal{g}_{12} & \mathcal{g}_{22} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{g}_{ij}$ алгебраическое дополнение к элементу g_{ij}. Т.о.

$$\mathcal{g}_{11} = 6, \mathcal{g}_{12} = 2, \mathcal{g}_{21} = 2, \mathcal{g}_{22} = 1$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = 6 - 4 = 2.$$

Т.о. $g^{ij} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Теперь найдем компоненты $T^{ij}{}_{k}$.

Пусть $i = j = k = 1$, тогда

$T^{11}{}_{1} = g^{1m} T^{1}{}_{m1} = g^{11} T^{1}{}_{11} + g^{12} T^{1}{}_{21} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 5.$

Пусть $i = j = 1\, k = 2$, тогда

$T^{11}{}_{2} = g^{1m} T^{1}{}_{m2} = g^{11} T^{1}{}_{12} + g^{12} T^{1}{}_{22} = 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 = 0$.

Далее аналогично

$T^{12}{}_{1} = g^{2m} T^{1}{}_{m1} = g^{21} T^{1}{}_{11} + g^{22} T^{1}{}_{21} = 1 \cdot 1 + 1/2 \cdot 2 = 2$.

$T^{12}{}_{2} = g^{2m} T^{1}{}_{m2} = g^{21} T^{1}{}_{12} + g^{22} T^{1}{}_{22} = 1 \cdot (-1) + 1/2 \cdot 3 = 1/2$.

$T^{21}{}_{1} = g^{1m} T^{2}{}_{m1} = g^{11} T^{2}{}_{11} + g^{12} T^{2}{}_{21} = 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = -4$.

$T^{21}{}_{2} = g^{1m} T^{2}{}_{m2} = g^{11} T^{2}{}_{12} + g^{12} T^{2}{}_{22} = 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 2$.

$T^{22}{}_{1} = g^{2m} T^{2}{}_{m1} = g^{21} T^{2}{}_{11} + g^{22} T^{2}{}_{21} = 1 \cdot (-2) + 1/2 \cdot 2 = -1.$

$T^{22}{}_{2} = g^{2m} T^{2}{}_{m2} = g^{21} T^{2}{}_{12} + g^{22} T^{2}{}_{22} = 1 \cdot 1 + 1/2 \cdot (-1) = 1/2$.

Приведем еще формулу для перехода от $T^{i}{}_{jk}$ к $T_{i}{}^{j}{}_{k}$

$$T_{i}{}^{j}{}_{k} = g_{im} g^{jl} T^{m}{}_{lk}.$$

Остальные тензоры будут иметь следующие компоненты:

тензор T_{ijk}	тензор T^{ijk}
$T_{111}=5 \quad T_{211}=-14$ $T_{112}=-3\; T_{212}=8$ $T_{121}=-2\; T_{221}=8$ $T_{122}=5 \quad T_{222}=-12$	$T^{111}=15 \quad T^{211}=-10$ $T^{112}=5 \quad T^{212}=-3$ $T^{121}=13/2\; T^{221}=-5/2$ $T^{122}=9/4\; T^{222}=-3/4$
тензор $T_{i\ k}^{\ j}$	тензор T_i^{jk}
$T_{1\ 1}^{\ 1}=13 \quad T_{2\ 1}^{\ 1}=-34$ $T_{1\ 2}^{\ 1}=-4 \quad T_{2\ 2}^{\ 1}=12$ $T_{1\ 1}^{\ 2}=4 \quad T_{2\ 1}^{\ 2}=-10$ $T_{1\ 2}^{\ 2}=-1/2\; T_{2\ 2}^{\ 2}=2$	$T_1^{11}=35 \quad T_2^{11}=-90$ $T_1^{12}=11 \quad T_2^{12}=-28$ $T_1^{21}=23/2\; T_2^{21}=-28$ $T_1^{22}=15/4\; T_2^{22}=-9$

Ответы к пункту 1.6.3

1) Так как первое число означает количество верхних индексов, второе – число нижних индексов, то согласно (3.9) имеем:

$$T_{i'}^{l'k'm'}=\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^n}\frac{\partial x^{k'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial x^{i'}}T_s^{npr}$$

$$T_{i'j'k'}^{l'm'}=\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^n}\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^r}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^s}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{k'}}T_{rst}^{np}$$

$$T_{j'k'}^{l'm'i'}=\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^n}\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{k'}}T_{st}^{npr}$$

$$T_{j'k'}^{l'm'i'}=\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^n}\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^r}\frac{\partial x^s}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{k'}}T_{st}^{npr}$$

$$T^{l'm'i'j'}=\frac{\partial x^{l'}}{\partial x^n}\frac{\partial x^{m'}}{\partial x^p}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^r}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^s}T^{nprs}$$

$$T_{i'j'k'l'm'}=\frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^p}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^r}{\partial x^{k'}}\frac{\partial x^s}{\partial x^{l'}}\frac{\partial x^t}{\partial x^{m'}}T_{nprst}$$

2) $T_{1'}^{1'}=1, T_{2'}^{1'}=-2, T_{1'}^{2'}=0, T_{2'}^{2'}=1.$

След определяется сверткой T_i^i, следовательно, в старой системе координат $T_i^i = T_1^1 + T_2^2 = 0 + 2 = 2$, а в новой $T_{i'}^{i'} = T_{1'}^{1'} + T_{2'}^{2'} = 1 + 1 = 2$. Т.е мы подтвердили тот факт, что $T_{i'}^{i'} = T_i^i$.

3) Для того чтобы найти компоненты тензора $T_{i'j'}$ в новой системе координат вычислим компоненты матрицы $\tau_{1'}^1 = 1/2, \tau_{2'}^1 = -1,$ $\tau_{1'}^2 = 1, \tau_{2'}^2 = 2$. Т.о. $\tau_{j'}^i = \begin{pmatrix} 1/2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Формула перехода в новую систему координат для тензора T_{ij} записывается в виде

$$T_{i'j'} = \tau_{i'}^k \tau_{j'}^l T_{kl}.$$

Отсюда следует, что

$$T_{1'1'} = \tau_{1'}^k \tau_{1'}^l T_{kl} = \tau_{1'}^1 \tau_{1'}^1 T_{11} + \tau_{1'}^1 \tau_{1'}^2 T_{12} + \tau_{1'}^2 \tau_{1'}^1 T_{21} + \tau_{1'}^2 \tau_{1'}^2 T_{22} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 +$$
$$+ \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-1) + 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 1.$$

$T_{1'2'} = 0$; $T_{2'1'} = 2$, $T_{2'2'} = 8$.

4) Так как $\vec{e}_1^{\,\prime} = (1,1)$, $\vec{e}_2^{\,\prime} = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$, то матрица $\tau_{i'}^k$ имеет вид

$$\tau_{i'}^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Обратная ей матрица $\lambda_i^{k'}$ вычисляется очень просто и равна

$$\lambda_i^{k'} = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}.$$

Тогда пользуясь формулой

$$T^{i'j'} = \lambda_k^{i'} \lambda_l^{j'} T^{kl}$$

получаем окончательный ответ

$T^{1'1'} = -8/9,$

$T^{1'2'} = 14/9,$

$T^{2'1'} = 2/9,$

$T^{2'2'} = -8/9.$

5) В декартовой системе координат (x,y) фундаментальный метрический тензор представляет собой единичную 2×2 матрицу, т.е. $g_{ij}=\mathrm{diag}(1,1)$, нам необходимо найти новый метрический тензор $g_{i'j'}$ в системе координат u,v. Обозначим старые координаты как $x=x^1,\, y=x^2$, а новые координаты со штрихом, т.е. $u=x^{1'},\, v=x^{2'}$. Тогда формула перехода от g_{ij} к $g_{i'j'}$ будет иметь вид

$$g_{i'j'}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}}g_{km}.$$

Для того чтобы воспользоваться этой формулой необходимо выразить старые координаты через новые, т.е. обратить систему

$$\begin{cases} u=\ln\sqrt{x^2+y^2} \\ v=\mathrm{arctg}(y/x) \end{cases}.$$

Ее можно переписать как

$$\begin{cases} e^u=\sqrt{x^2+y^2} \\ \mathrm{tg}v=y/x \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} e^{2u}=x^2+y^2 \\ y=x\,\mathrm{tg}v \end{cases}.$$

Подставляя выражение для y из второго выражения в первое получаем

$$e^{2u}=x^2+x^2\,\mathrm{tg}^2 v\Rightarrow e^{2u}=x^2\,\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Окончательно имеем следующую систему

$$\begin{cases} x^1=e^{x^{1'}}\cos x^{2'} \\ x^2=e^{x^{1'}}\sin x^{2'} \end{cases},$$

или в новых обозначениях

$$\begin{cases} x^1=e^{x^{1'}}\cos x^{2'} \\ x^2=e^{x^{1'}}\sin x^{2'} \end{cases}.$$

Теперь можно написать

$$g_{1'1'}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{1'}}g_{km}=\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}}g_{11}+\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}\frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}}g_{22},$$

где мы учли тот факт, что $g_{12}=g_{21}=0$.

После взятия соответствующих производных получаем

$g_{1'1'}=\left(e^u\cos v\right)^2+\left(e^u\sin v\right)^2=e^{2u}$.

Другие компоненты находятся аналогично

$$g_{2'2'} = \left(e^u \sin v\right)^2 + \left(e^u \cos v\right)^2 = e^{2u},$$

$$g_{1'2'} = g_{2'1'} = 0.$$

6) Проведя рассуждения аналогичные предыдущему пункту, получаем

$$g_{1'1'} = \frac{u^2 - v^2}{u^2 - 1},$$

$$g_{2'2'} = \frac{u^2 - v^2}{1 - v^2},$$

$$g_{1'2'} = g_{2'1'} = 0.$$

7) Фундаментальный метрический тензор в этой параболической системе координат имеет вид

$$g_{1'1'} = \frac{v + u}{4} \cdot \frac{1}{u},$$

$$g_{2'2'} = \frac{v + u}{4} \cdot \frac{1}{v},$$

$$g_{1'2'} = g_{2'1'} = 0.$$

8) Выражая координаты u, v через x, y получаем

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(u^2 - v^2) \\ y = uv \end{cases}.$$

Тогда компоненты метрического тензора имеют вид

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = u^2 + v^2,$$

$$g_{1'2'} = g_{2'1'} = 0.$$

9) В эллиптической системе координат компоненты метрического тензора выражаются через u, v следующим образом

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = \mathrm{ch}^2 v - \sin^2 u,$$

$$g_{1'2'} = g_{2'1'} = 0.$$

10) В цилиндрической системе координат метрический тензор запишем в виде

$$g_{i'j'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

11) В сферической системе координат получим следующий метрический тензор

$$g_{i'j'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}.$$

Ответы к пункту 1.6.4

1) Для этого выражения тензорность была доказана в пункте 1.5.4.

2) Рассмотрим выражение $a_{i,j} \equiv \dfrac{\partial a_i}{\partial x^j}$ (запятая означает сокращенную запись частной производной). Так как a_i - ковектор, то мы можем написать в штрихованной системе координат

$$a_{i',j'} \equiv \frac{\partial a_{i'}}{\partial x^{j'}} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(a_{i'}\right) = \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} a_m\right) =$$

$$= \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} \frac{\partial a_m}{\partial x^k} + \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}}\right) a_m =$$

$$= \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} \frac{\partial a_m}{\partial x^k} + \frac{\partial}{\partial x^{j'}}\left(\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}}\right) a_m = \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} \frac{\partial a_m}{\partial x^k} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} a_m.$$

Окончательно мы получили, что

$$a_{i',j'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}} a_{m,k} + \frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} a_m.$$

Сравнивая это выражение с общей формулой закона преобразования тензоров (3.9) видим, что объект $a_{i,j}$ тензором не является, так как в его законе преобразования присутствует второе слагаемое. Так как это слагаемое представляет собой вторую производную от координат, то оно равно нулю при линейных преобразованиях, а следовательно для таких преобразований выражение $a_{i,j}$ - есть тензор.

3) Рассмотрим выражение $\dfrac{\partial a_i}{\partial x^j}-\dfrac{\partial a_j}{\partial x^i}$, так как коэффициент 1/2 не влияет на тензорные свойства объекта. Тогда, в силу предыдущего пункта, получим

$$\frac{\partial a_{i'}}{\partial x^{j'}}-\frac{\partial a_{j'}}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}}\frac{\partial a_m}{\partial x^k}+\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{j'}\partial x^{i'}}a_m-\left(\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}}\frac{\partial a_m}{\partial x^k}+\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^{i'}\partial x^{j'}}a_m\right)=$$

$$=\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}}\frac{\partial a_m}{\partial x^k}-\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}}\frac{\partial a_m}{\partial x^k},$$

здесь вторые производные уничтожились, так как *частные производные от независимых переменных коммутируют*. Так как индексы k и m немые, то их можно обозначать произвольно, благодаря этому во втором слагаемом заменим индекс m на k, а индекс k на m. Тогда мы получаем

$$\frac{\partial a_{i'}}{\partial x^{j'}}-\frac{\partial a_{j'}}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}}\frac{\partial a_m}{\partial x^k}-\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}\frac{\partial a_k}{\partial x^m}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial a_m}{\partial x^k}-\frac{\partial a_k}{\partial x^m}\right).$$

Окончательно для выражения $b_{i,j}\equiv\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial a_i}{\partial x^j}-\dfrac{\partial a_j}{\partial x^i}\right)$ получаем закон преобразования

$$b_{i',j'}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{j'}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}}b_{m,k}.$$

Таким образом, данный объект является тензором.

Здесь мы получили очень интересный результат, разность двух нетензорных объектов $\dfrac{\partial a_j}{\partial x^i}$ дает тензор.

4) Рассмотрим дивергенцию вектора $\vec{a}$, в индексных обозначениях это выражение имеет вид $\mathrm{div}\vec{a}\equiv\dfrac{\partial a^i}{\partial x^i}$. Закон преобразования этой величины найдем по аналогии с пунктом 2.

$$\frac{\partial a^{i'}}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(a^{i'}\right)=\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}a^m\right)=\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\frac{\partial a^m}{\partial x^k}+\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\right)a^m=$$

$$=\frac{\partial x^k}{\partial x^m}\frac{\partial a^m}{\partial x^k}+\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^m}\right)a^m=\delta_m^k\frac{\partial a^m}{\partial x^k}+\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k\partial x^m}a^m.$$

Окончательно закон преобразования дивергенции примет вид

$$\frac{\partial a^{i'}}{\partial x^{i'}}=\frac{\partial a^m}{\partial x^m}+\frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^k\partial x^m}a^m.$$

Отсюда видно, что это выражение не является тензором нулевого ранга (скаляром) в случае произвольных преобразований координат, а есть тензор только при линейных преобразованиях.

5) Так как ξ^i, η^i - векторы, то при переходе из системы координат $x^/$ в систему x имеем

$$b^{i^/} \equiv \xi^{j^/} \frac{\partial \eta^{i^/}}{\partial x^{j^/}} - \eta^{j^/} \frac{\partial \xi^{i^/}}{\partial x^{j^/}} =$$

$$= \left(\xi^m \frac{\partial x^{j^/}}{\partial x^m} \right) \left(\frac{\partial x^p}{\partial x^{j^/}} \frac{\partial}{\partial x^p} \right) \left(\frac{\partial x^{i^/}}{\partial x^k} \eta^k \right) - \left(\eta^m \frac{\partial x^{j^/}}{\partial x^m} \right) \left(\frac{\partial x^p}{\partial x^{j^/}} \frac{\partial}{\partial x^p} \right) \left(\frac{\partial x^{i^/}}{\partial x^k} \xi^k \right),$$

здесь в скобках приведены соответствующие преобразования, так вектор имеет вид $\xi^{j^/} = \xi^m \dfrac{\partial x^{j^/}}{\partial x^m}$, а оператор дифференцирования можно представить как $\dfrac{\partial}{\partial x^{j^/}} = \dfrac{\partial x^p}{\partial x^{j^/}} \dfrac{\partial}{\partial x^p}$. Убирая ненужные скобки получаем

$$b^{i^/} = \xi^m \frac{\partial x^{j^/}}{\partial x^m} \frac{\partial x^p}{\partial x^{j^/}} \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial x^{i^/}}{\partial x^k} \eta^k \right) - \eta^m \frac{\partial x^{j^/}}{\partial x^m} \frac{\partial x^p}{\partial x^{j^/}} \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial x^{i^/}}{\partial x^k} \xi^k \right) =$$

$$= \xi^m \delta^p_m \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial x^{i^/}}{\partial x^k} \eta^k \right) - \eta^m \delta^p_m \frac{\partial}{\partial x^p} \left(\frac{\partial x^{i^/}}{\partial x^k} \xi^k \right) = \xi^p \left(\frac{\partial x^{i^/}}{\partial x^k} \frac{\partial \eta^k}{\partial x^p} - \right.$$

$$\left. \eta^k \frac{\partial^2 x^{i^/}}{\partial x^p \partial x^k} \right) - \eta^p \left(\frac{\partial x^{i^/}}{\partial x^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^p} + \frac{\partial^2 x^{i^/}}{\partial x^p \partial x^k} \xi^k \right) =$$

$$= \xi^p \frac{\partial x^{i^/}}{\partial x^k} \frac{\partial \eta^k}{\partial x^p} - \eta^p \frac{\partial x^{i^/}}{\partial x^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^p} + \xi^p \eta^k \frac{\partial^2 x^{i^/}}{\partial x^p \partial x^k} - \eta^p \xi^k \frac{\partial^2 x^{i^/}}{\partial x^p \partial x^k}$$

В третьем и четвертом слагаемом вынесем за скобки множитель $\xi^p \eta^k$ для этого в последнем слагаемом немой индекс p заменим на k, а k заменим на p, тогда имеем

$$b^{i^/} = \xi^p \frac{\partial x^{i^/}}{\partial x^k} \frac{\partial \eta^k}{\partial x^p} - \eta^p \frac{\partial x^{i^/}}{\partial x^k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^p} + \xi^p \eta^k \left(\frac{\partial^2 x^{i^/}}{\partial x^p \partial x^k} - \frac{\partial^2 x^{i^/}}{\partial x^k \partial x^p} \right)$$

Так как частные производные коммутируют, то выражение в круглых скобках равно нулю, а значит, окончательно получаем

$$b^{i^/} = \frac{\partial x^{i^/}}{\partial x^k} \left(\xi^p \frac{\partial \eta^k}{\partial x^p} - \eta^p \frac{\partial \xi^k}{\partial x^p} \right) \equiv \frac{\partial x^{i^/}}{\partial x^k} b^k .$$

Отсюда видно, что выражение $b^i \equiv \xi^j \eta^i,_j - \eta^j \xi^i,_j$ является тензором.

6) Так как ξ^i - вектор, а η_i - ковектор, то при переходе из одной системы координат в другую получаем

$$b_{i'} \equiv \xi^{j'} \frac{\partial \eta_{i'}}{\partial x^{j'}} + \eta_{j'} \frac{\partial \xi^{j'}}{\partial x^{i'}} = \xi^m \frac{\partial}{\partial x^m}\left(\eta_n \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}}\right) + \eta_m \frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^p}\left(\xi^n \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^n}\right) =$$

$$= \xi^m \left(\frac{\partial \eta_n}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}} + \eta_n \frac{\partial^2 x^n}{\partial x^m \partial x^{i'}}\right) + \eta_m \frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \left(\frac{\partial \xi^n}{\partial x^p} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^n} + \xi^n \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^p \partial x^n}\right) =$$

$$= \xi^m \frac{\partial \eta_n}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}} + \xi^m \eta_n \frac{\partial^2 x^n}{\partial x^m \partial x^{i'}} + \eta_m \frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial \xi^n}{\partial x^p} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^n} +$$

$$+ \eta_m \frac{\partial x^m}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \xi^n \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^p \partial x^n} =$$

Сворачиваем в третьем слагаемом по индексу j', а в четвертом заменяем $m \leftrightarrow n$ тогда получаем

$$b_{i'} = \xi^m \frac{\partial \eta_n}{\partial x^m} \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}} + \eta_n \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial \xi^n}{\partial x^p} + \xi^m \eta_n \left(\frac{\partial^2 x^n}{\partial x^m \partial x^{i'}} + \frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^p \partial x^m}\right)$$

В первом слагаемом заменим немой индекс n на p, а с выражением в скобках поступим следующим образом

$$\frac{\partial^2 x^n}{\partial x^m \partial x^{i'}} + \frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial^2 x^{j'}}{\partial x^p \partial x^m} = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^n}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} + \frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}} \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m}\right) =$$

$$= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^n}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} + \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\left(\frac{\partial x^n}{\partial x^{j'}}\right) \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m} =$$

$$= \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m} \frac{\partial^2 x^n}{\partial x^{j'} \partial x^{i'}} + \frac{\partial}{\partial x^{i'}}\left(\delta^n_m\right) - \frac{\partial^2 x^n}{\partial x^{i'} \partial x^{j'}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^m} = 0 .$$

Нуль получается из-за того, что: а) производная от символа Кронекера равна нулю, б) частные производные коммутируют. Окончательно имеем

$$b_{i'} = \xi^m \frac{\partial \eta_p}{\partial x^m} \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} + \eta_n \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} \frac{\partial \xi^n}{\partial x^p} = \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}}\left(\xi^m \frac{\partial \eta_p}{\partial x^m} + \eta_n \frac{\partial \xi^n}{\partial x^p}\right) \equiv \frac{\partial x^p}{\partial x^{i'}} b_p .$$

Таким образом, $b_i \equiv \xi^j \eta_i,_j + \eta_j \xi^j,_i$ - ковектор.

7), 8), 9), 10) то, что эти объекты тензоры доказывается аналогичным образом.

1.7. Тензорные плотности

1.7.1 Детерминант метрического тензора

Вычислим детерминант дважды ковариантного метрического тензора

$$g \equiv \det g_{ik}. \tag{7.1}$$

Является ли данный объект тензором? Так как у него нет индексов, то сразу может показаться, что это есть скаляр. Однако это не так. Запишем закон преобразования метрического тензора

$$g_{i'k'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{k'}} g_{jl}. \tag{7.2}$$

Перепишем это выражение в матричном виде

$$\begin{pmatrix} g_{1'1'} & g_{1'2'} \\ g_{2'1'} & g_{2'2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \end{pmatrix}$$

и в индексной записи

$$g_{i'k'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{k'}} g_{11} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{k'}} g_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{k'}} g_{21} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{k'}} g_{22}.$$

Чтобы заметить, что эти выражения равносильны, перемножим две первые матрицы, тогда

$$\begin{pmatrix} g_{1'1'} & g_{1'2'} \\ g_{2'1'} & g_{2'2'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} g_{11} + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} g_{21} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} g_{12} + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} g_{22} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} g_{11} + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} g_{21} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} g_{12} + \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} g_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \end{pmatrix}$$

Для примера вычислим компоненту $g_{1'2'}$ по этим двум формулам:

$$g_{1'2'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} g_{11} + \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} g_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} g_{21} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} g_{22}$$

и

$$g_{1'2'} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} g_{11} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} g_{21} \right) \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} + \left(\frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} g_{12} + \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} g_{22} \right) \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}},$$

которые приводят к одинаковому результату.

Очевидно, что и другие компоненты $g_{i'j'}$ имеют аналогичное матричное представление. Если обозначить матрицу g_{ij} как G, а матрицу $\dfrac{\partial x^j}{\partial x^{i'}}$ как $\left(\dfrac{\partial x}{\partial x'}\right)$, то тогда (7.2) в матричной записи примет вид

$$G' = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^T G \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right). \tag{7.3}$$

Если теперь взять детерминант (7.3), то получится

$$g' = J^2 g, \tag{7.4}$$

где $J \equiv \det\dfrac{\partial x}{\partial x'} = \left|\dfrac{\partial x}{\partial x'}\right|$ – якобиан перехода от $x \to x'$.

Из выражения (7.4) следует, что g не является скалярной величиной (для скаляра было бы $g' = g$). Это означает, что детерминант метрического тензора не является тензором.

Введем теперь понятие тензорной плотности.

<u>**def**</u> Если закон преобразования некоторой величины отличается от тензорного на множитель $J^{-1} \equiv \det\dfrac{\partial x'}{\partial x} = \left|\dfrac{\partial x'}{\partial x}\right|$ в степени w, т.е. имеет вид

$$T^{k_1'k_2'\dots k_p'}_{l_1'l_2'\dots l_q'} = J^{-w}\frac{\partial x^{k_1'}}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial x^{k_2'}}{\partial x^{i_2}}\dots\frac{\partial x^{k_p'}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{l_1'}}\frac{\partial x^{j_2}}{\partial x^{l_2'}}\dots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{l_q'}}T^{i_1i_2\dots i_p}_{j_1j_2\dots j_q},$$

то такой объект называется <u>*тензорной плотностью веса*</u> w.

Таким образом, для тензорной плотности ранга 0 (нет индексов) мы имеем следующий закон преобразования

$$g' = J^{-w} g. \tag{7.5}$$

Сравнивая (7.5) с (7.4) мы видим, что детерминант метрического тензора является тензорной величиной веса $w = -2$.

Рассмотрим произвольную тензорную плотность второго ранга F_i^j с весом w. Это значит, что этот объект имеет следующий закон преобразования

$$F_{i'}^{k'} = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^w \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^l}\frac{\partial x^m}{\partial x^{i'}}F_m^l. \tag{7.6}$$

Возведем закон преобразования (7.4) в степень $-w/2$, тогда получим

$$\left(g^{/}\right)^{-w/2} = \left|\frac{\partial x^{/}}{\partial x}\right|^{w} \left(g\right)^{-w/2}, \tag{7.7}$$

отсюда можно записать, что

$$\left|\frac{\partial x^{/}}{\partial x}\right|^{w} = \left(g\right)^{w/2}\left(g^{/}\right)^{-w/2}.$$

Тогда выражение (7.6) примет вид

$$\mathsf{F}^{k^{/}}_{i^{/}} = (g)^{w/2}(g^{/})^{-w/2}\frac{\partial x^{k^{/}}}{\partial x^{l}}\frac{\partial x^{m}}{\partial x^{i^{/}}}\mathsf{F}^{l}_{m}. \tag{7.8}$$

Перепишем (7.8) как

$$(g^{/})^{w/2}\mathsf{F}^{k^{/}}_{i^{/}} = \frac{\partial x^{k^{/}}}{\partial x^{l}}\frac{\partial x^{m}}{\partial x^{i^{/}}}(g)^{w/2}\mathsf{F}^{l}_{m}. \tag{7.9}$$

Отсюда видно, что если ввести объект

$$F^{l}_{m} = g^{w/2}\mathsf{F}^{l}_{m}, \tag{7.10}$$

то он имеет следующий закон преобразования

$$F^{k^{/}}_{i^{/}} = \frac{\partial x^{k^{/}}}{\partial x^{l}}\frac{\partial x^{m}}{\partial x^{i^{/}}}F^{l}_{m} \tag{7.11}$$

т.е. является тензором.

В приведенных выше рассуждениях нигде не играл роли тот факт, что у тензорной плотности было два индекса. Это позволяет сформулировать нам следующее утверждение.

Если $\mathsf{F}^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ есть тензорная плотность с весом w, то $F^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} = g^{w/2}\mathsf{F}^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q}$ есть тензор.

1.7.2 Символ Леви–Чивита

Введем в N мерном пространстве символ Леви–Чивита, который будет содержать N индексов $\varepsilon^{i_1 \dots i_N}$. Пусть, по определению, компонента $\varepsilon^{12\dots N} \equiv +1$, а любая другая компонента есть либо $+1$, если необходима четная перестановка индексов до выражения $12\dots N$, либо -1 если перестановка нечетная, либо 0, если хотя бы два индекса совпадают.

В качестве примера рассмотрим 3-х мерное пространство. Тогда символ Леви–Чивита имеет следующие ненулевые компоненты

$$\varepsilon^{123} = +1; \varepsilon^{231} = +1; \varepsilon^{312} = +1; \varepsilon^{132} = -1; \varepsilon^{213} = -1; \varepsilon^{321} = -1. \quad (7.12)$$

Наша задача состоит в том, чтобы определить закон преобразования этого объекта и тем самым узнать является ли он тензором или нет.

Для простоты и наглядности рассуждений рассмотрим двумерное пространство, тогда символ Леви–Чивита имеет только две ненулевые компоненты $\varepsilon^{12} = +1; \varepsilon^{21} = -1$.

Т.к. ε^{ij} есть известный объект, то можно вычислить новый (неизвестный) объект H^{ij} по формуле

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^l} \varepsilon^{kl} = H^{i'j'}.$$

Получаем следующие компоненты. Так пусть $i' = 1, j' = 2$, тогда

$$H^{1'2'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \varepsilon^{12} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} \varepsilon^{21} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} - \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} = J^{-1},$$

где J есть якобиан перехода, т.е. детерминант матрицы

$$J \equiv \det \frac{\partial x}{\partial x'} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \dfrac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \end{vmatrix}. \quad (7.13)$$

Если $i' = 2, j' = 1$, то мы получаем

$$H^{2'1'} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \varepsilon^{12} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} \varepsilon^{21} = \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} - \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} = -J^{-1}.$$

Если же $i' = j' = 1$ либо $i' = j' = 2$, то получится 0, та как

$$H^{1'1'} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\varepsilon^{12} + \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\varepsilon^{21} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} - \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2}\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} = 0.$$

Т.к компоненты символа Леви–Чивита, по определению, обязаны быть либо $+1,-1,0$ в любой системе координат, т.е. должно быть

$$\varepsilon^{1'2'} = +1; \varepsilon^{2'1'} = -1; \varepsilon^{1'1'} = \varepsilon^{2'2'} = 0, \tag{7.14}$$

то можно написать

$$H^{i'j'} = J^{-1}\varepsilon^{i'j'}$$

или

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^l}\varepsilon^{kl} = J^{-1}\varepsilon^{i'j'}$$

Окончательно имеем

$$\varepsilon^{i'j'} = J\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^l}\varepsilon^{kl}. \tag{7.15}$$

Согласно определению тензорной плотности (пункт 1.7.1) объект ε^{ij} является тензорной плотностью с весом $w=-1$.

Аналогичные рассуждения можно провести и в общем случае, для этого необходимо учесть, что

$$\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial x^{2'}}{\partial x^{i_2}}\ldots\frac{\partial x^{N'}}{\partial x^{i_N}}\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_N} = \det\frac{\partial x'}{\partial x}. \tag{7.16}$$

Таким образом, закон преобразования для символа Леви–Чивита в N-мерном пространстве имеет вид

$$\varepsilon^{j_1' j_2' \ldots j_N'} = J\frac{\partial x^{j_1'}}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial x^{j_2'}}{\partial x^{i_2}}\ldots\frac{\partial x^{j_N'}}{\partial x^{i_N}}\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_N}. \tag{7.17}$$

Согласно пункту (1.7.1) можно определить символ $E^{i_1 i_2 \ldots i_N}$ по правилу

$$E^{i_1 i_2 \ldots i_N} = g^{-1/2}\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_N}. \tag{7.18}$$

Тогда полученный объект будет тензором. Докажем это явным образом

$$E^{j_1' j_2' \ldots j_N'} = \frac{1}{\sqrt{g'}}\varepsilon^{j_1' j_2' \ldots j_N'} = \frac{1}{\sqrt{J^2 g}}J\frac{\partial x^{j_1'}}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial x^{j_2'}}{\partial x^{i_2}}\ldots\frac{\partial x^{j_N'}}{\partial x^{i_N}}\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_N} =$$

$$= \frac{\partial x^{j_1'}}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial x^{j_2'}}{\partial x^{i_2}}\ldots\frac{\partial x^{j_N'}}{\partial x^{i_N}}\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_N} = \frac{\partial x^{j_1'}}{\partial x^{i_1}}\frac{\partial x^{j_2'}}{\partial x^{i_2}}\ldots\frac{\partial x^{j_N'}}{\partial x^{i_N}}E^{i_1 i_2 \ldots i_N}.$$

Здесь мы воспользовались формулой (7.4) преобразования детерминанта метрического тензора.

Сделаем одно очень важное замечание. Закон преобразования тензорной плотности отличается от закона преобразования тензора множителем, который представляет собой якобиан в некоторой степени. Это значит, что если $J=1$, например, в случае вращения системы координат, то тогда тензорная плотность ведет себя как тензор. Если же $J=-1$, отражение координат, то тензорная плотность после перехода в другую систему координат может отличаться знаком от соответствующего тензора, тогда говорят, что мы имеем дело с псевдотензором. В частности символ Леви–Чивита в случае вращения системы координат ведет себя как тензор, при отражениях координат – как псевдотензор, а при произвольных преобразованиях является тензорной плотностью.

Вычислим следующее выражение

$$g_{1i_1}\dots g_{Ni_N}\varepsilon^{i_1\dots i_N}. \tag{7.19}$$

В случае двумерного пространства (7.19) расписывается элементарно

$$g_{1i}g_{2j}\varepsilon^{ij}=g_{11}g_{22}\varepsilon^{12}+g_{12}g_{21}\varepsilon^{21}=g_{11}g_{22}-g_{12}g_{21}=\det(g_{ij})\equiv g.$$

В общем случае мы также получим детерминант, т.е.

$$g_{1i_N}\dots g_{Ni_N}\varepsilon^{i_1\dots i_N}=g. \tag{7.20}$$

Отсюда следует, что выражение $g_{1i_N}\dots g_{Ni_N}\varepsilon^{i_1\dots i_N}$ равно $+g$ если индексы $j_1\dots j_N$ являются четной перестановкой от 1 2 …N и равно $-g$ если перестановка нечетная. Тогда можно положить

$$\varepsilon_{j_1\dots j_N}=\frac{1}{g}g_{j_1 i_1}\dots g_{j_N i_N}\varepsilon^{i_1\dots i_N}. \tag{7.21}$$

Фактически мы определили символ Леви–Чивита с нижними индексами, компонента $\varepsilon_{12\dots N}$ которого равна $+1$, а все остальные определяются по правилу аналогичному для $\varepsilon^{i_1\dots i_N}$.

Рассматривая закон преобразования для $\varepsilon_{i_1\dots i_N}$ можно прийти к выводу, что этот объект является тензорной плотностью с весом $w=+1$, а значит, тензор с нижними индексами определяется как

$$E_{i_1 i_2\dots i_N}=g^{1/2}\varepsilon_{i_1 i_2\dots i_N}. \tag{7.22}$$

Это выражение можно получить, просто опустив индексы у (7.18)

$$E_{j_1 j_2\dots j_N}=g_{j_1 i_1}\dots g_{j_N i_N}E^{i_1\dots i_N}=g_{j_1 i_1}\dots g_{j_N i_N}\frac{1}{\sqrt{g}}\varepsilon^{i_1\dots i_N}.$$

Учитывая (7.21) получаем

$$E_{j_1 j_2 \ldots j_N} = \frac{1}{\sqrt{g}} g \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_N} = \sqrt{g} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_N} .$$

Что совпадает с (7.22).

Обратим внимание на то, что иногда (см. [1]) ковариантный символ Леви–Чивита (с нижними индексами) определяется опусканием индексов у тензорной плотности $\varepsilon^{i_1 \ldots i_N}$, т.е.

$$e_{j_1 \ldots j_N} = g_{j_1 i_1} \ldots g_{j_N i_N} \varepsilon^{i_1 \ldots i_N} .$$

В этом случае в пространстве Минковского с метрическим тензором $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$ компонента $e_{0123} = -1$, т.е. равна детерминанту метрического тензора.

Обратим внимание на обозначения, справа (в последней формуле) стоит определенный ранее символ $\varepsilon^{i_1 \ldots i_N}$, а слева новый символ $e_{i_1 \ldots i_N}$.

1.7.3 Инвариантный объем

При замене переменных в N–мерном интеграле появляется якобиан перехода, т.е.

$$d^N x = \left| \frac{\partial x}{\partial x^{/}} \right| d^N x^{/} .$$

Это означает, что величина $d^N x$ является скалярной плотностью с весом $+1$, так как

$$d^N x^{/} = \left| \frac{\partial x^{/}}{\partial x} \right| d^N x \equiv J^{-1} d^N x .$$

Тогда, согласно (7.10) выражение

$$d\Omega \equiv g^{1/2} d^N x , \tag{7.23}$$

является скаляром.

В этом очень легко убедиться, так как

$$d\Omega^{/} \equiv \left(g^{/} \right)^{1/2} d^N x^{/} = J \cdot (g)^{1/2} \cdot J^{-1} \cdot d^N x = g^{1/2} d^N x = d\Omega .$$

Выражение $d\Omega$ называется инвариантным объемом.

Литература

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: «Наука», 1988, с.512.
2. Вейнберг С. Гравитация и космология. – М.: «Мир», 1975, с.696.
3. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия. – М.: «Наука», 1979, с.760.
4. Бёрке У. Пространство-время, геометрия, космология. – М.: «Мир», 1985, с.413.
5. Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж. Гравитация Т.1. – М.: «Мир», 1977, с.480.
6. Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж. Гравитация Т.2. – М.: «Мир», 1977, с.525.
7. Мизнер Ч., Торн К., Уиллер Дж. Гравитация Т.3. – М.: «Мир», 1977, с.510.
8. Шредингер Э. Простарнственно-временная структура Вселенной. – Новокузнецк.: Новокузнецкий физико-математический институт., 2000, с.226.