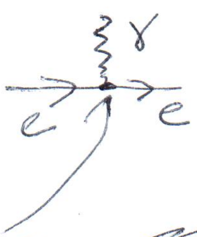
QED. Introduction

Квантовая электродинамика — наиболее успешная теория когда-либо созданная в физике. ~~Точность~~ Её количественные предсказания проверены на эксперименте с потрясающей точностью. Наибольшая точность достигнута в измерении аномального дипольного магнитного момента электрона.

Согласно ур-нию Дирака магнитный момент электрона

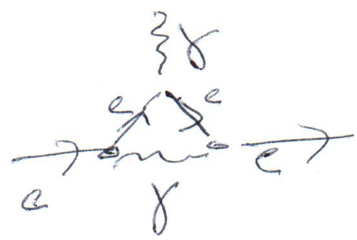
$$\mu_e = g\mu_B \qquad \mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} \qquad g_{Dirac} = 2$$

Первые радиационные поправки, связанные с перенормировкой вершинной части



$g = 2$

$g\mu_B$ ~~[illegible]~~



$$\frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} = 0.0011614$$

$$\alpha = e^2/\hbar c$$

(fine structure constant)

Знаменитый результат J. Schwinger, 1948

~~В~~ настоящее время имеются аналитические расчеты вплоть до α^3. Численные компьютерные расчеты проведены вплоть до α^5 (12672 Feynman diagrams)

$$\frac{g-2}{2} = 0.001159652181(643 \pm 764)$$

12 порядков

$$(g-2)_{exp} = 0.002\,319\,304\,361\,(82 \pm 26)$$

Это согласие теории и эксперимента (12 порядков!!!) доказывает, что QED в области её применимости ~~[illegible]~~ фундаментальная теория взаимодействия электронов (и других лептонов) с фотонами

Очень важными экспериментами являются определение g-фактора мюона ($\mu \simeq$ в 220 раз тяжелее электрона), поэтому вклад "неизвестных" частиц в рад. поправки $(g-2)_{мюон}$ чувствительны к достаточно тяжелым частицам (от 100 GeV до 1000 GeV).

Первые эксперименты по ~~определению~~ измерению g-2 мюона проводились в CERN в 60-х годах (идея принадлежала ~~Леону~~ L. Lederman, который в 1988 г. получил Нобелевскую премию за "открытие мюонного нейтрино"). С 1984 г. в США — g-2 ~~мюон~~ muon experiment проводятся сначала в ~~Брук~~ Brookhaven National Lab (до 2001), а теперь в Fermilab (Stanford, Chicago)

$(g-2)_{exp} = 0.0011659\underline{209}$ (Brookhaven data)

180

theory

Fermilab начала сбор данных в 2017 и будет набирать статистику до 2020 г.

Основы квантовой электродинамики (релятивистская кв. механика взаимодействующих электронов и фотонов) были заложены П.А.М. Дираком. В 1928 г. ~~была~~ была опубликована его знаменитая статья, где он предложил релятивистски-инвариантное уравнение для электрона (ур-ние Дирака). В 1932 г. американский физик C. Anderson открыл в космических лучах позитрон (античастица электрона, предсказанная теорией Дирака), за это открытие он получил Нобелевскую премию в 1936 г.

Дираком (в 1927 г) был предложен метод вторичного квантования, развитый и затем Фоком (Fock states) и Pascual Jordan. Этот метод ~~[illegible]~~ в 30-40е годы был основным при расчете ~~[illegible]~~ различных ~~[illegible]~~ QED процессов.

С самого начала построения QED было понятно, что эта теория не может быть окончательной. В ней появлялись расходимости: при расчете наблюдаемого заряда электрона и наблюдаемой массы электрона.

Простейшие типы расходимостей можно легко увидеть, рассчитывая энергию вакуума

Для гармонического осциллятора спектр энергий $E=\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$

Энергия основного состояния (вакуума)

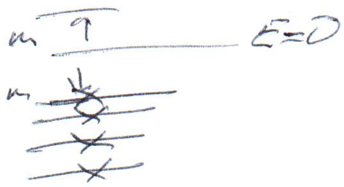
$$E(n=0) = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

В теории поля свободное поле можно представить как набор осцилляторов $\mathcal{E}(k) = \sqrt{(kc)^2+(mc^2)^2}$ (в дальнейшем $\hbar=c=1$)

$$E_0 = \frac{\nu_B}{2}\sum_k \mathcal{E}(k) \xrightarrow{k\to\infty} \infty$$

(ν_B – число степеней свободы, $\nu=2$ для фотонов, $m=0$)

Для ~~электронов~~ фермионов энергия вакуума отрицательная (это энергия заполненного "моря Дирака")



$$E_0 = -\frac{\nu_F}{2}\sum_k \mathcal{E}(k)$$

($\nu = 2\times 2$ для электронов; spin degeneracy $(2s+1)$; particle-antiparticle)

В суперсимметричных ~~...~~ моделях $\nu_b=\nu_f$, $m_b=m_f$ и $E_0=0$ $\Longleftrightarrow$ точная суперсимметрия по определению означает нулевую энергию вакуума ~~...~~

В QED число расходимостей конечно (по-существу — это расходимости при расчете собственного заряда и массы электрона). ~~и могут~~ Они не растут с ростом порядка теории возмущений. Такие теории называются <u>перенормируемыми</u>. В 40е–50е годы были разработаны методы, когда задавая наблюдаемые (конечные) величины "e" и "m" можно избежать расходимостей при вычислении наблюдаемых величин в любом порядке теории возмущений. Эти методы получили название "теории "перенормировок"" (renormalization theory). Основную роль здесь сыграли идеи Фейнмана, Швингера (и независимо японского физика Томонаги). За эти работы этим трем выдающимся ученым была присуждена Нобелевская премия в 1965 г.

R. Feynman стал очень известным благодаря новому подходу к квантованию полей ⟺ path integral (континуальные интегралы) и так называемым фейнмановским диаграммам — графическая иллюстрация расчета континуального интеграла по теории возмущений.

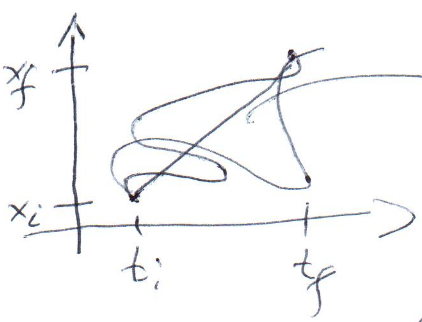
В квантовой механике вместо волновой функции ψ можно рассматривать амплитуду перехода из некоего начального состояния $|i\rangle$ в какое-то конечное состояние $|f\rangle$ (она же — матричный элемент оператора эволюции)

$$A_{if} = \langle f|i\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int Dx(t)\, e^{\frac{i}{\hbar}\int_{t_i}^{t_f} dt\, \mathcal{L}(x,\dot{x})}$$

классический лагранжиан

classical trajectory (free motion)



В дальнейшем фейнмановский континуальный интеграл стал основным методом формулирования квантовой теории поля, а фейнмановские диаграммы — удобным методом визуализации и расчета различных процессов в QED и других моделях теории поля.

В QED заряд (эффективная константа взаимодействия) зависит от энергии (расстояния). На малых энергиях наблюдаемый заряд $e^2/\hbar c = 1/137,\ldots$ С ростом энергии (уменьшением расстояния) заряд растет. Иначе говоря — вакуум QED можно рассматривать как диэлектрик, в котором имеет место экранировка заряда $e(r_1) > e(r_2)$ if $r_1 < r_2$

Экранировка заряда происходит за счет эффектов поляризации вакуума. Рост заряда ~~на~~ ~~мало~~ слабый — логарифмический $\alpha^{-1} \sim -\ln(q^2/m^2)$

$$\alpha(q^2) = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137} \qquad \alpha(q^2 \sim M_W^2) = \frac{1}{129}$$

10^{-17} см

$q \to 0$

Для QED группа симметрии — калибровочная группа $U(1)$ — абелевая группа — ~~группа~~ преобразований (группа $U(1)$ — её преобразования коммутируют друг с другом)

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x)$$

$$\psi' = \psi e^{i\alpha(x)}$$

$$\boxed{\mathcal{L}_{QED} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^2 + \bar\psi\{\gamma_\mu(\partial_\mu - ieA_\mu) - m\}\psi}$$

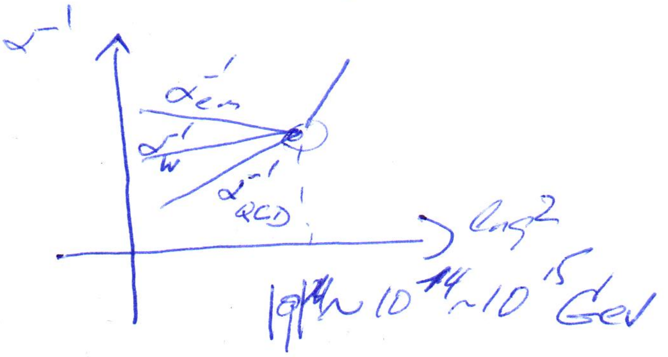
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\frac{E^2 - H^2}{2} \qquad \mathcal{L}_{int} = eA_\mu \underbrace{\bar\psi\gamma_\mu\psi}_{j_\mu}$$

Группа симметрии слабых взаимодействий — неабелевая $SU(2)$ } однако эта симметрия спонтанно нарушена за счет конденсата в вакууме скалярного (хиггсовского) поля

Группа симметрии сильных взаимодействий (QCD — квантовая хромодинамика) $SU(3)$

Если отложить зависимость α_j^{-1} от $\ln q^2$



$\alpha_{GUT}^{-1} \simeq 40$

↓

Grand Unified Theory

Стандартная ~~модель~~ теория ~~сильных~~ электро-слабых и сильных взаимодействий (хорошо проверенная в эксперименте)

$G_{st} = U(1) \otimes SU(2) \otimes SU(3)$

Модель великого объединения ~~должны~~ описывается группой симметрии, в которой G_{st} является подгруппой. Минимальной такой группой является $SU(5)$ (Georgi, S. Glashow 1974). Она, в частности, предсказывает распад протона ~~т.к.~~ ($p \to e^+ \pi^0$) т.к. лептоны и кварки входят в один мультиплет G_{GUT}. Оценки $\tau_p \gtrsim 10^{31}$ лет (существующие эксперименты по поиску распада протона дают значения $\tau_p > 10^{34}$ (Super-Kamiokande exp., Japan) и поэтому так называемая минимальная GUT не реализуется)

Есть много других расширений минимальной GUT (несколько $SU(5)$ и несколько мультиплетов хиггсовских полей, исключительная группа E_7, его суперсимметричные расширения и т.д.)

Современный проект по поиску распада протона LAGUNA (Large Apparatus studying Grand Unification and Neutrino Astrophysics) $\tau_p(p \to e^+\pi^0) \gtrsim 10^{35}$ лет.

Hamilton equations.

В классической механике ур-ния Гамильтона полностью эквивалентны уравнениям Лагранжа. Подход Гамильтона позволяет более глубоко понять симметрии и геометрические принципы классической механики (для математиков подход Гамильтона — это изучение геометрии фаз-вого пространства)

ур-ния Лагранжа $\quad \mathcal{L}(q,\dot q) \Rightarrow \dfrac{d}{dt}\dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta \dot q} = \dfrac{\delta \mathcal{L}}{\delta q}$

функция координат "q" и скорости "$\dot q$"

обобщенный импульс p

$$dL = \frac{\partial L}{\partial q}dq + \frac{\partial L}{\partial \dot q}d\dot q = \dot p dq + p d\dot q =$$

$$d(p\dot q) = \dot q dp + p d\dot q$$

$$= \dot p dq + d(p\dot q) - \dot q dp$$

$$d(\underbrace{p\dot q - L}_{H(q,p,t)}) = -\dot p dq + \dot q dp$$

$H(q,p,t)$ — функция Гамильтона (энергия системы)
в общем случае она может быть функцией времени

$$\begin{cases} \dot q = \dfrac{\partial H}{\partial p} & \Leftrightarrow \text{"определение скорости"} \\ \dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial q} & \Leftrightarrow \text{уравнение Ньютона} \end{cases}$$

2n уравнений первого порядка по времени для 2n неизвестных $q_j(t)$, $p_j(t)$ $\quad j = 1..n$

Напомню, что эти ур-ния наз. <u>каноническими</u>

Используя ур-ния Гамильтона легко показать, что $\dfrac{dH}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial t}$ и следовательно если ~~Гамильто~~ функция Гамильтона явно не зависит от времени ($\frac{\partial H}{\partial t} = 0$), то энергия в системе сохраняется

Что нового? ~~Подход~~ Подход Гамильтона считается более математически изящным (в его основе лекций теория дифференциальных форм).

Дирак писал в своих лекциях, что важность подхода Гамильтона стала понятной только после создания квантовой механики т.к. формальный переход от классической к квантовой мех. наиболее "естественно" выглядит именно в рамках подхода Гамильтона (ниже мы это продемонстрируем).

Действительно в гамильтоновой механике легко осуществляется ~~переход~~ формальный переход от уравнений классической динамики к уравнениям Гейзенберга, после замены скобок Пуассона на коммутаторы (хотя такая замена просто постулируется и обосновать такую процедуру математически невозможно)

Гамильтонов подход трудно обобщить на "релятивизм" (Гамильтониан — является временной компонентой 4-импульса P_μ, $(\mu = t, \vec{r})$). Дирак потратил много усилий для построения ~~[illegible]~~ релятивистской квантовой теории поля в гамильтоновом формализме. Это теория опубликована на русском языке в его ~~лекциях~~ книге

| П.А.М. Дирак "Лекции по квантовой теории поля" (русский перевод, 1971 г.) |

~~[illegible]~~ Эти усилия не получили ~~[illegible]~~ развития

В настоящее время при построении квантовой теории поля используется формулировка Фейнмана "интеграла по траекториях"

$$\int \mathcal{D}q \exp\{\tfrac{i}{\hbar} S[q(t)]\} \qquad S = \int dt\, \mathcal{L}(q,\dot{q})$$

действие — релятивистский скаляр

В этом случае переход к классической физике при $S \gg \hbar$ можно обосновать как взятие функционального интеграла методом перевала.

Дирак — гениальный физик. Даже заблуждения гения интересны. Кроме того именно подход Гамильтона оказался для Дирака важным при получении его знаменитого ур-ния. Поэтому потратим некоторое время на формулировку основных понятий и методов теории Гамильтона

1) Скобки Пуассона

$f(q,p,t)$ некоторая дин. переменная

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q}\dot q + \frac{\partial f}{\partial p}\dot p \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial H}{\partial q} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H,f\}_P$$

— subscript "P", для того чтобы отличать от антикоммутатора

definition: ~~of Poisson~~ $f(q,p)$, $g(q,p)$

$$\{f,g\}_P = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}$$

(так у Ландау, "Механика")

Если f явно не зависит от времени, то ~~уравнение~~ динамика динамической переменной определяется ур-нием

аналогия с ур-нием Гейзенберга

$$\frac{df}{dt} = \{H,f\}_P \iff i\hbar\frac{d\hat f}{dt} = [\hat f,\hat H]$$

Можно определить скобки Пуассона с обратным знаком

$$\{f,g\}_P = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q}$$

тогда

$$\frac{df}{dt} = \{f,H\}_P \iff i\hbar\frac{d\hat f}{dt} = [\hat f,\hat H] \qquad \underline{\{..\}_P \Longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\,,\,]} \;(*)$$

В чем математический смысл такой замены неясно!!! Но так из уравнений гамильтоновой динамики следуют правильные квантовые уравнения.

Скобки Пуассона антисимметричны, равны нулю с любой константой (с-число) ~~...~~

$$\{f,g\}_P = -\{g,f\}_P$$

$$\{f,c\}_P = 0$$

а также удовлетворяют очевидным из определения свойствам

$$\{f_1+f_2,g\}_P = \{f_1,g\}_P + \{f_2,g\}_P$$

$$\{f_1 f_2,g\}_P = f_1\{f_2,g\}_P + \cancel{f_2}\{f_1,g\}_P f_2$$

В частности, если $f \equiv q$, $g = p$ то мы имеем

$$\{q,q\}_P = \{p,p\}_P = 0 \qquad \{q,p\}_P = 1$$

(в квантовой теории эти равенства переходят в знаменитые коммутационные соотношения операторов координаты и импульса

$$[\hat q,\hat q] = [\hat p,\hat p] = 0 \qquad [\hat q,\hat p] = i\hbar$$
)

~~...~~ Нетривиальным свойством скобок Пуассона является т.н. тождество Якоби, включающее скобки Пуассона трех динамических переменных f, g, h

$$\{f,\{g,h\}_P\}_P + \{h,\{f,g\}_P\}_P + \{g,\{h,f\}_P\}_P = 0$$

циклические перестановки

(см. доказательство, например, у Ландау "Механика")

~~...~~ Легко показать, что если f, g интегралы движения ($\frac{df}{dt}=0$, $\frac{dg}{dt}=0 \Rightarrow \{H,f\}_P=0$ $\{H,g\}_P=0$) то и скобки Пуассона $\{f,g\}_P$ также являются интегралом движения (теорема Пуассона)

Заметим, что доказательство для коммутаторов тривиально: (если f и g коммутируют с гамильтонианом то $[\hat f,\hat g]$ также коммутирует с гамильтонианом

$$[\hat H,[\hat f,\hat g]] = [\hat H,\hat f\hat g - \hat g\hat f] = [\hat H,\hat f\hat g] - [\hat H,\hat g\hat f] =$$

$$= \underbrace{\hat H\hat f\hat g - \hat f\hat g\hat H}_{0} \quad \underbrace{}_{0}$$

2) Канонические преобразования

Уравнения Гамильтона допускают широкий класс преобразований, оставляющий их инвариантными (переход к „новым" координатам Q и импульсам P)

$$Q = Q(p, q, t) \qquad P = P(p, q, t) \qquad (*)$$

Для того, чтобы уравнения Гамильтона не меняли свой вид ~~функции Q и P должны~~ $\dot{Q} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial P}$, $\dot{P} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial Q}$

(такие преобразования называются <u>каноническими</u>)

новая функция Гамильтона $\tilde{H}$ может быть в общем виде быть представлена как

$$\tilde{H} = H + \frac{\partial F}{\partial t}, \quad p = \frac{\partial F}{\partial q} \quad P = -\frac{\partial F}{\partial Q}$$

$F(q, Q, t)$ – произвольная функция старых и новых координат (производящая функция канонического преобр.) В квантовой теории важны преобразования, оставляющие гамильтониан инвариантным $\tilde{H} = \hat{H}$, т.е. производящая функция не должна зависеть от времени. При канонических преобразованиях скобки Пуассона не меняются. В квантовой теории канонические преобразования отвечают разному выбору базиса в Гильбертовом пространстве векторов состояния.

Уравнение Клейна-Гордона

Теория относительности устанавливает простое соотношение между энергией и импульсом частицы

$p_\mu^2 = m^2 \Leftrightarrow$ квадрат 4-импульса есть скаляр группы Лоренца

$\Downarrow$ $(c=1)$

$E^2 - \vec{p}^{\,2} = m^2 \qquad E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2 \quad \Rightarrow \quad E = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2 + m^2c^4}$

Вспомним как можно "получить" ур-ние Шредингера для свободной нерелятивистской частицы

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}$$

$$H \Rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \qquad \vec{p} \Rightarrow \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\left\{ i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\psi \right\}$$

ψ – комплексная волновая функция

Конечно, это никакой не вывод ур-ния Шредингера. Просто рецепт перехода от классических переменных к операторам. Применим это рецепт к релятивистскому соотношению между энергией и импульсом.

Сразу возникает вопрос, что такое отрицательные энергии

? $E = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$. В классической теории такая проблема решается просто. Мы рассматриваем теорию только с положительными энергиями, а отрицательные энергии считаем "нефизическим" решением. Если $m \neq 0$ скачкообразный переход между "мирами" с $E>0$ и $E<0$ невозможен (решения с $E<0$ можно не рассматривать). В квантовой теории такие рассуждения не "проходят". Если есть взаимодействие такой частицы с другими полями, то частицы с $E>0$ излучив, например, фотон (если они имеют ~~заряд~~ электрический заряд) могут перейти в состояния с $E<0$ и проваливать ~~эту~~ дальше понижая энергию $E\to-\infty$, испуская фотоны. Такие теории не существуют (говорят, что нет вакуумного состояния — состояния с наименьшей энергией.)

Мы увидим далее, что в релятивистской теории фермионов эта трудность решается введением нового понятия — "моря Дирака" (полностью заполненных состояний с $E<0$). ~~В силу~~ Из-за принципа запрета Паули, переход в такие состояния запрещен. Для бозонов такого запрета нет. Есть выход из этой ситуации? Сейчас мы докажем, что в квантовой теории бозонных возбуждений такой проблемы ~~нет~~ вообще нет. Основное состояние теории существует и характеризуется (уже) бесконечной положительной энергией.

Если выбрать только один положительный корень $E=\sqrt{p^2+m^2}$ и заменить E и $\vec p$ на операторы ($c=1$), получим

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=\sqrt{-\hbar^2\vec\nabla^2+m^2}\,\psi$$

Вообще говоря, это теория с высшими ~~производными~~ производными по пространственным координатам ~~уравнения~~

$$f(\hat A)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\hat A^n \qquad \left(\int_x \Rightarrow \text{интегральный оператор}\right)$$

Разложение квадратного корня не содержит отрицательных степеней ($n>0$), но мы имеем бесконечный ряд по градиентам. Только для свободных частиц (решения — плоские волны $\psi\sim\exp(\frac{i}{\hbar}p_\mu x^\mu)$) мы знаем ~~конечный~~ ответ ($E=\sqrt{p^2+m^2}$).

Поэтому применим рецепт перехода к операторам к соотношению $E^2=\vec p^{\,2}+m^2$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi=\left(-\hbar^2\vec\nabla^2+m^2\right)\psi$$

В системе единиц $\hbar=c=1$

$$(\Box+m^2)\psi=0 \qquad \Box=\partial_\mu\partial^\mu \text{ — д'аламбертиан}$$

Это знаменитое ур-ние Клейна-Гордона-Фока
W. Gordon (1926), В. Фок (1926), O. Klein (1926)
Все ~~статьи~~ работы были независимо друг от друга опубликованы в журнале Zs. f. Phys.

Это ур-ние для комплексной функции ψ предсказывает существование **античастиц** (решения с $E<0$ приводят к новой ~~статистике~~ физике — античастицам).

Напишем лагранжиан, приводящий к ур-нию КГ

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \psi^* \partial_\mu \psi - m^2 \psi^* \psi \Rightarrow \begin{array}{l}(\Box + m^2)\psi = 0 \\ (\Box + m^2)\psi^* = 0.\end{array}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}}\right) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \psi} \qquad \psi \Leftrightarrow q \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \Rightarrow q_{,\mu}$$

Тензор энергии-импульса

$$T_\mu^\nu = q_{,\mu} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta q_{,\nu}} - \mathcal{L}\delta_\mu^\nu$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$$

метрический тензор Минковского

$$\Downarrow$$

$$T_{\mu\nu} = \{\partial_\mu \psi^*, \partial_\nu \psi\} - \mathcal{L} g_{\mu\nu}$$

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$$

Плотность энергии $\quad T_{00} = \left|\frac{\partial \psi}{\partial t}\right|^2 + |\nabla \psi|^2 + m^2 |\psi|^2 \geq 0.$

~~Проблемы~~
Решения

Уравнение КГ первое квантовое релятивистски инвариантное ур-ние. Оно содержит вторую производную по времени. Следовательно начальные условия содержат не только саму функцию при $t=0$ $\psi(t=0)$ но и её первую производную. Если трактовать ψ как ~~вероятности~~ амплитуду вероятности обнаружения системы в некотором состоянии мы приходим к противоречию $\Leftrightarrow$ существование "отрицательных вероятностей", что абсурдно.

Легко проверить, что имеет место закон сохранения

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \qquad j_\mu = i(\psi^* \partial_\mu \psi - (\partial_\mu \psi^*)\psi)$$

Иногда выбирают другую нормировку $j^\mu = (\rho, \vec{j})$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*\right)$$

$$\vec{j} = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\psi^*\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*\right)$$

$\Rightarrow \partial_t\rho + \vec{\nabla}\vec{j} = 0$

для $\psi = \psi_0 \exp\left(-\frac{i}{\hbar}Et + \frac{i}{\hbar}\vec{p}\vec{x}\right)$

$\Downarrow$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(-i\frac{E}{\hbar} - \frac{iE}{\hbar}\right) = \frac{E}{mc^2}|\psi_0|^2$$

в нерелятивистском пределе $E \approx mc^2$ ρ переходит в положительно определенную плотность вероятности

ρ

В теории поля принято нормировать "волновую функцию" ψ на одну частицу в единичном объеме $(V=1)$

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}} e^{-ip_\mu x^\mu}$$

В этом случае плотность энергии $T_{00} = \varepsilon$ и полная энергия $E = \int d^3r\, T_{00} = \varepsilon V = \varepsilon$ (в единицах $\hbar = c = 1$ $[x] = [t] = [E]^{-1}$)

Квантование скалярного поля. Античастицы

Видно что плотность "заряда" в общем случае не есть положительно определенная величина и не может иметь вероятностной трактовки (как $|\psi|^2$ в нерелятивистской кв. механике). Это обстоятельство заставило в свое время Дирака найти новое релятивистское ур-ние для частиц, содержащее, как и ур-ние Шредингера, первую производную по времени.

Что есть правильная физическая интерпретация сохраняющегося "тока" j^μ и "заряда" $Q = \int d^3r\, j_0$?

Для этого необходимо проквантовать бозонное поле ψ (метод вторичного квантования). Почему вторичное квантование? Это запись волновых функций через операторы рождения и уничтожения.

В этом подходе наглядно видна важность

решений с отрицательной энергией $E<0$. Кроме того в таком подходе (что соответствует переходу от одночастичной кв. механики к многочастичной теории — квантовой теории поля) автоматически появляется естественная (правильная) интерпретация оператора тока $\hat{j}_\mu$

$$\psi = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} \left(a_p e^{-ip_\mu x_\mu} + b_p^+ e^{+ip_\mu x_\mu} \right)$$

пока a_p b_p — -ские операторы

$$\psi^+ = \sum_p \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} \left(a_p^+ e^{+ip_\mu x_\mu} + b_p e^{-ip_\mu x_\mu} \right)$$

$$\hat{H} = \int d\vec{x}\, T_{00} = \sum_p \varepsilon_p \left(a_p^+ a_p + b_p b_p^+ \right)$$

Бозонные операторы подчиняются ~~бозе~~ алгебре с коммутаторами $[a_p, a_{p'}^+] = \delta_{pp'}$ $[a_p, a_{p'}] = [b_p^+, a_{p'}^+] = 0$

$[b_p, b_{p'}^+] = \delta_{pp'}$

(для непрерывного спектра $\delta_{pp'} \Rightarrow \delta(p-p')$)

Назовём положительно-определенную величину $\hat{N}_p = a_p^+ a_p$ — оператор числа частиц (с импульсом p)

$\hat{\bar{N}}_p = b_p^+ b_p$ — оператор числа античастиц (с импульсом p)

Тогда

$$\hat{H} = \sum_p \varepsilon_p \left(\hat{N}_p + \hat{\bar{N}}_p + 1 \right) \qquad (*)$$

появление античастиц $\Leftrightarrow$ существование двух знаков энергии "±" (релятивистский эффект!!!)

Заряд $\hat{Q} = \int d\vec{x}\, \hat{j}_0$

$$\hat{Q} = \sum_p \left(\hat{N}_p - \hat{\bar{N}}_p - 1 \right) \qquad (**)$$

Это очень важные выражения. Из $(*)$ видно, что энергия вакуума для скалярного $(s=0)$ комплексного бозонного поля $a_p|0\rangle = 0$ $b_p|0\rangle = 0$

$$E_0 = 2\cdot\frac{1}{2}\sum_p{}' \varepsilon_p \Rightarrow \infty$$ (бесконечная! положительная величина)

Заряд вакуума $Q_0 = -2\cdot\frac{1}{2}\sum_p{}'(1) \Rightarrow -\infty$

бесконечен и отрицателен

Появление бесконечностей в теории, вообще говоря, плохой знак. Действительно энергия и заряд вакуума равны бесконечности?

В любом "локальном" (лабораторном) эксперименте мы измеряем не полную энергию, а только разность энергий. Поэтому появление бесконечных констант, казалось бы, не должно нас волновать ~~...~~ и мы можем просто ~~отбросить~~ "переопределить" эту величину, считая $E_0 = 0$ $Q_0 = 0$

~~Это неверно~~ В общем случае это не так (неправильное утверждение)

(1) Энергия вакуума входит в ур-ния гравитации (ур-ния Эйнштейна)

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \varkappa T_{\mu\nu}$$ $T_{\mu\nu}$ — средний тензор энергии импульса

В частности $\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle$ — определяет, то что сейчас называют Λ-членом в ур-ниях Эйнштейна

$$\langle 0|T_{\mu\nu}|0\rangle = \Lambda g_{\mu\nu}$$

Из эксперимента известно, что это величина в настоящее время, хотя и мала, но не равна нулю ($\Lambda \neq 0$)

(*) Энергия вакуума сама по себе приводит к расширению Вселенной (Вселенная де-Ситтера) (без вещества). Решение де-Ситтера описывает экспоненциально быстрое расширение ~~...~~ пр-ства-времени. ~~...~~ Наблюдения подтверждают ~~...~~ ускоренное разбегание галактик.

Истинно нейтральные частицы (не имеющие античастиц)

Если поле φ вещественное $\varphi \Rightarrow \varphi$ $\varphi^* = \varphi$, то легко видеть что его разложение по операторам рождения и уничтожения содержит только один вид операторов a_p, a_p^+

$$\varphi = \sum \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon_p}} \left(a_p e^{-ip_\mu x_\mu} + a_p^+ e^{+ip_\mu x_\mu} \right)$$

$$L = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} m \varphi^2$$

(появление множителя $\frac{1}{2}$ отвечает правильной нормировке.

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - L g_{\mu\nu}$$

$$H = \int d\vec{x}\, T_{00} \overset{\text{после вторичного квантования}}{\Longrightarrow} \frac{1}{2} \sum_p \varepsilon_p (a_p^+ a_p + a_p a_p^+) =$$

$$= \sum_p \varepsilon_p \left(\hat{N}_p + \frac{1}{2} \right)$$

$E_0 = \frac{1}{2} \sum_p \varepsilon_p$ — энергия нулевых колебаний вещественного скалярного ($S=0$) поля

сравни с энергией нулевых колебаний осциллятора $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$

i) Отсутствуют античастицы

(ii) заряд поля $Q \equiv 0$ $(j^\mu \equiv 0)$

Конечно можно было определить новый ток $\tilde{j}_\mu = \varphi \partial_\mu \varphi$

Но он в отличие от j_μ не сохраняется

$$\partial_\mu \tilde{j}_\mu = (\partial_\mu \varphi)^2 + \varphi \partial_\mu^2 \varphi = (\partial_\mu \varphi)^2 - m^2 \varphi^2 \neq 0$$

Ниже мы увидим, что в 1D (одномерные пр-ство)

$j_\mu^{top} \sim \varepsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \varphi$ можно интерпретировать как топологический ток

$$Q_{top} = \int d\vec{x}\, j_0 \sim \int dx \frac{\partial}{\partial x} \varphi \neq 0$$

для топологически устойчивых возбуждений (топологических солитонов)

Нулевые флуктуации вакуума. Эффект Казимира

Есть ли лабораторные эффекты, связанные с энергией вакуума. Первым таким эффектом, экспериментально измеренным, является так называемый лэмбовский сдвиг (смещение энергии 2S уровня атома водорода ~~по~~ относительно 2P уровня). По существу это разница между собственными энергиями (массой) связанного в атоме и свободного электрона. (эксперимент Лэмба и Резерфорда, 1947 г.). Теор. расчет лэмбовского сдвига можно найти в любой монографии по КЭД. Расчет довольно громоздкий. Здесь мы рассмотрим другой эффект, обязанный нулевым колебаниям вакуума — эффект Казимира.

Рассчитаем разность энергии вакуума для 1D скалярного безмассового поля на конечном отрезке ~~~~ длины L и для бесконечной системы ($L \to \infty$)

$$E_0 = \frac{1}{2}\sum_p \varepsilon_p \qquad\qquad \varepsilon_p = \sqrt{p^2+m^2} \quad (\hbar = c = 1).$$

Граничные условия $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ $(*)$.

Решения ур-ния КГ, удовлетворяющие $(*)$ имеют вид $\varphi \sim \sin p_n x \qquad p_n = \frac{\pi n}{L} \qquad n = 1, 2, \ldots$

($n=0 \Rightarrow \varphi = 0$ нефизическое решение)

Математически задача заключается в нахождении конечной разности $E_C = E_0(L) - E_0(L\to\infty)$ двух расходящихся
(Casimir energy)

при больших импульсах выражений (одно — бесконечная сумма $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n^2+a^2}$, второе расходящийся интеграл $\int_0 dp\sqrt{p^2+m^2}$)

Их разность (энергия Казимира) конечное выражение и не зависит от способа регуляризации расходящихся сумм и интегралов). Для расчета этой величины мы

14

Используем очень удобный метод аналитической регуляризации (частный случай метода т.н. обобщенной ζ-функции)

Рассмотрим функцию $F(n) = (\beta^2 n^2 + m^2)^{1/2}$ $\quad \beta = \frac{\pi}{L}$

Используем формулу суммирования Абеля-Плана

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(y)\,dy - \frac{F(0)}{2} + i\int_0^{\infty} dt\, \frac{F(it)-F(-it)}{e^{2\pi t}-1}$$

$$\cancel{\sum_{n=0}^{\infty} F(n) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} F(n) = \int_0^{\infty} F(y)\,dy + \frac{F(0)}{2} + i\int_0^{\infty} dt\, \frac{F(it)-F(-it)}{e^{2\pi t}-1}}$$

$F(0) = m$ $\quad F(\pm it) = \sqrt{m^2 + \beta^2(\pm it)^2}$ совпадают при $t < \frac{m}{\beta}$, при $t > \frac{m}{\beta}$ нужно взять их значения на разных римановых листах $F(it) - F(-it) = 2i\sqrt{\left(\frac{\pi t}{L}\right)^2 - m^2}$ $\quad 2\pi t = y$

$$\operatorname{Reg} \sum_{n=1}^{\infty} (\beta^2 n^2 + m^2) = -\frac{m}{2} - \frac{2}{4\pi L}\int_{2\mu}^{\infty} dy\, \frac{\sqrt{y^2-(2\mu)^2}}{e^{y}-1} = \qquad \mu = mL$$

$F(+it) = \sqrt{m^2 + \beta^2 t^2 e^{i\pi}} =$ $\quad F(-it) = \sqrt{m^2 + \beta^2 t^2 e^{2(i\pi + i\frac{\pi}{2})}} =$

$= i\sqrt{-m^2+\beta^2 t^2}$ $\quad = \sqrt{m^2+\beta^2 t^2}\, e^{i\pi + i\frac{\pi}{2}} = -i\sqrt{m^2+\beta^2 t^2}$

$$E_c = -\frac{m}{4} - \frac{1}{4\pi L}\int_{2\mu}^{\infty} dy\, \frac{\sqrt{y^2-(2\mu)^2}}{e^{y}-1}$$

a) $\mu \equiv mL \gg 1$ $\qquad y \gg 1.$ $\quad e^{y} \gg 1$

$$E_c = -\frac{m}{4} - \frac{1}{4\pi L}\int_{2\mu}^{\infty} dy\, e^{-y}\sqrt{y^2-(2\mu)^2} \simeq -\frac{m}{4} - \frac{1}{4\pi L} e^{-2\mu}\sqrt{\frac{\pi\, 2mL}{2}}$$

$$\int_a^{\infty} dx\, e^{-x}\sqrt{x^2-a^2} \underset{x=a+t}{\overset{a\gg 1}{\simeq}} e^{-a}\int_0^{\infty} dt\, e^{-t}\sqrt{2a}\, t^{1/2} =$$

$$\underset{t \ll a}{=} e^{-a}\sqrt{2a}\int_0^{\infty} dt\, t\, e^{-t} = e^{-a}\sqrt{\frac{\pi a}{2}}$$

$$E_c \simeq -\frac{m}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{m}{\pi L}}\, e^{-2mL}$$

Сила Казимира $F_c = -\frac{\partial E_c}{\partial L} \sim e^{-2mL} \ll 1.$

$m \gg L^{-1}$

$\lambda \simeq \frac{h}{p} \sim \frac{2\pi\hbar}{ms}$ $L \gg \lambda$

где-бройлевская длина волны частицы!

Восстановим размерность $\mu \equiv mL = \frac{msL}{\hbar} = 2\pi\frac{L}{\lambda}$

Первое слагаемое нас не интересует, оно не даёт вклад в силу Казимира

$$E_c = -\frac{1}{4}ms^2 - \frac{\hbar s}{L}\frac{1}{4}\sqrt{2\frac{L}{\lambda}}\, e^{-4\pi\left(\frac{L}{\lambda}\right)} \qquad L/\lambda \gg 1$$

$\lambda = \frac{h}{ms}$

(ii) $m \to 0$

$$\int_0^\infty dy\, \frac{y}{e^y - 1} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$E_c(m=0) = -\frac{1}{4\pi L}\frac{\pi^2}{6} = -\frac{\pi}{24}\frac{1}{L} \Rightarrow -\frac{\pi}{24}\frac{\hbar s}{L}$$

$$\boxed{F_c = -\frac{\partial E_c}{\partial L} = -\frac{\pi}{24}\frac{\hbar s}{L^2}} \Leftarrow \text{притяжение}$$

Зависящие от m добавки неаналитичны

$\mu \equiv mL \ll 1$ $\qquad E_c = E_c(m=0) + \frac{K}{L}\mu^2 \ln \mu^2 \quad K \equiv \frac{1}{32\pi}$

Влияние граничных условий.

1). periodic b.c. $\varphi(x) = \varphi(L+x)$ $\qquad e^{ipL} = 1$

$$pL = 2\pi n \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2.$$

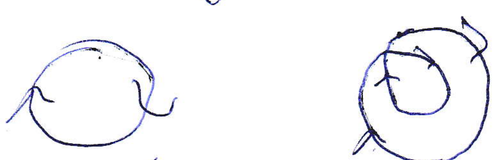
$$p_n = \frac{2\pi n}{L}$$

$L \Rightarrow L/2$, доп. фактор 2 из-за суммирования по отрицательным n

$$\boxed{F_C(p.b.c) = -\frac{\pi}{6}\frac{\hbar s}{L^2}}$$

2). twisted b.c.

$\varphi(x+L) = e^{i\alpha}\varphi(x)$ $\qquad \alpha = \pi$ (периодические граничные условия на листе Мёбиуса)



periodic $\qquad$ anti-periodic.

$$p_n = \frac{2\pi(n+1/2)}{L}$$

$$\mathrm{Reg}\sum_{n=0}^{\infty}{}' F(n+\tfrac{1}{2}) = -i\int_0^{\infty}\frac{F(it)-F(-it)}{e^{2\pi t}+1}\,dt$$

$\mathcal{E}_C(m=0) = \frac{\pi}{12}\frac{1}{L}$ $\qquad F_C = -\frac{\partial \mathcal{E}_C}{\partial L} = \frac{\pi}{12}\frac{1}{L^2}$ $\qquad$ "отталкивание"

$\sum\limits_{n=0,\pm1,..}{}' F(2n+1) = \sum\limits_n F(n) - \sum\limits_n F(2n)$ $\qquad \frac{\pi n}{L}$, $\frac{\pi n}{L}$, $2\frac{\pi n}{L}$

$\frac{\pi n}{L}$ $\quad n = 0, \pm 1 .. \Rightarrow \mathcal{E}_C = -\frac{1}{12}$

$\mathcal{E}_C(\text{antiperiodic}) = \frac{\hbar s}{L}\left(-\frac{1}{12}+\frac{1}{6}\right)2 + \frac{\pi}{12}\frac{\hbar s}{L}$

Расчет силы Казимира, используя ζ-функцию

$m=0$ $\qquad \cancel{pS = \frac{\hbar s}{L}n}$ $\qquad \varepsilon = pS \qquad \sin(k_n L) = 0$

$$p_n = \hbar k_n \qquad k_n = \frac{\pi n}{L}$$

$$E(L) = \frac{1}{2}\hbar s \sum_n{}' k_n =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\hbar s}{L}\pi\sum_{n=1}^{\infty}{}' n \;=\; \zeta(s)$$

дзета-функция Римана

$$\mathcal{E}_C = \mathrm{Reg}\,E(L) = \frac{\pi}{2}\frac{\hbar s}{L}\lim_{s\to -1}\left(\sum_{n=1}^{\infty}{}' n^{-s}\right)$$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \qquad s > \frac{1}{2}$$

$$\zeta(s) = \frac{2^{s-1}}{s-1} - 2^{s}\int_0^{\infty} \frac{\sin(s \operatorname{arctg} t)}{(1+t^2)^{s/2}(e^{2\pi t}-1)}\,dt$$

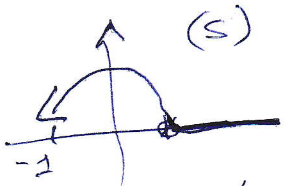
Lindelöf (1905)

$$\zeta(-m) = -\frac{B_{m+1}}{m+1} \qquad m = 1, 2, 3$$

$$\zeta(-2m) = 0$$

B_n — числа Бернулли

$$s = -1 \qquad \zeta(-1) = -\frac{B_2}{2} \qquad B_2 = \frac{1}{6} \qquad \left\{ \zeta(-1) = -\frac{1}{12} \right\}$$

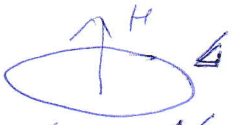


$$\zeta(-1) = -1/12.$$

$$\boxed{\begin{aligned} E_C &= -\frac{\pi}{24}\frac{\hbar c}{L} \\ F_C &= -\frac{\partial E_c}{\partial L} = -\frac{\pi}{24}\frac{\hbar c}{L^2} \end{aligned}}$$

Зададим вопрос — можно ли по какому-нибудь внешнему параметру перейти, скажем, от силы отталкивания Казимира к силе притяжения. Рассмотрим безмассовое ($m=0$) заряженное (ψ – комплексная величина) скалярное поле, заданное на окружности S^1 во внешнем э.м. поле $A_\mu = (0, A_x)$. Калибровочное поле A_μ легко ввести в теорию, используя стандартную замену ($c=1$)

$$\hat p_\mu \to \hat p_\mu - qA_\mu \qquad -i\partial_x \to -i\partial_x - qA_x \qquad \left\{ \partial_x \to \partial_x - iqA_x \right.$$



$$\oint A_\mu dx^\mu = A_x L = \int dS\, H = \Phi$$

$$A_x = \Phi/L$$

$$\left[\partial_t^2 - (\partial_x - iqA_x)^2\right]\psi = 0$$

$$\left[\partial_t^2 - \left(\partial_x - iq\frac{\Phi}{L}\right)^2\right]\psi = 0$$

$$\Phi_0 = \frac{hc}{q} \Rightarrow (\hbar = c = 1) \Rightarrow \frac{2\pi}{q}$$

$$\left[\partial_t^2 + \left(\hat p_x - \frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2\right]\psi = 0$$

~~В~~ В нашей задаче внешнее поле может быть убрано (8)
преобразованием

$$\psi \Rightarrow \tilde{\psi} e^{i 2\pi \frac{x}{L} \frac{\Phi}{\Phi_0}}$$

$$\left(\hat{p}_x - \frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}\right)^2 \psi \Rightarrow \left(\hat{p}_x + \cancel{2\pi \frac{1}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}} - \cancel{\frac{2\pi}{L}\frac{\Phi}{\Phi_0}}\right)^2 \tilde{\psi}$$

Ур-ния для $\tilde{\psi}$ имеет вид свободного уравнения

$(\partial_t^2 - \partial_x^2)\tilde{\psi} = 0$, но теперь ~~поле~~ функция $\tilde{\psi}$ удовлетворяет "скрученным" граничным условиям на S^1
twisted

$$\psi(x+L,t) = \psi(x,t) \Rightarrow \boxed{\tilde{\psi}(x+L,t) = e^{i\varphi_{AB}}\tilde{\psi}(L)}$$

$$\varphi_{AB} = 2\pi\frac{\Phi}{\Phi_0}$$

Соответственно спектр

$$e^{ip_n L} = e^{i\alpha + i2\pi n} \qquad L p_n = 2\pi\left(n + \frac{\varphi_{AB}}{2\pi}\right)$$

$$p_n = \frac{2\pi}{L}\left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0}\right) = \frac{2\pi}{L}(n+\alpha)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Найдем энергию Казимира, используя метод обобщенной ζ-функции

$$E_C = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon(n) - \int dn\, \varepsilon(n) \qquad \varepsilon(n) = |p_n| = \frac{2\pi}{L}|n+\alpha|$$

вклад флуктуаций частиц $(+q)$ и античастиц $(-q)$

$$E_C = \frac{2\pi}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n+\alpha|^{-s}\Big|_{s\to -1} = \lim_{s\to -1}\frac{2\pi}{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(n+\alpha)^{-s} + \sum_{n=0}^{\infty}(n-\alpha)^{-s}\right\} =$$

$$\lim_{s\to -1}\frac{2\pi}{L}\left\{\cancel{(\alpha)^{-s}} + \zeta(s,\alpha) + \zeta(s,-\alpha)\right\} =$$

$$= \frac{2\pi}{L}\left\{\zeta(-1,\alpha) + \zeta(-1,-\alpha)\right\}$$

Мы рассматриваем комплексное скалярное поле, что описывает частицы и античастицы, соответственно с зарядом q и $-q$. Поэтому параметр $\alpha = \Phi/\Phi_0$ положителен для частиц и отрицателен для античастиц. Положительные "n" означают движение по кольцу по часовой стрелке, отрицательные "n" — против часовой стрелки. Орбитальный момент (квантование которого и дает число "n") нечетен при инверсии времени и четен при инверсии координат. Согласно CPT теореме (CPT = 1) переход от положительных "n" к отрицательным "n" ($t \to -t$) должно сопровождаться переходу от частиц к античастицам. Поэтому,

$$\mathcal{E}_V = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{L}\sum_{\substack{n\geq 0\; q>0 \\ n<0\; q<0}}' \left|n + q\frac{\Phi}{\Phi_0}\right| = \frac{2\pi}{L}\left(\sum_{n=0}^{\infty}' |n+\alpha| + \sum_{n=-\infty}^{-1}' |+n-\alpha|\right) =$$

$$q = \pm 1$$

$$= \frac{2\pi}{L}\sum_{n=0}^{\infty}' |n+\alpha|$$

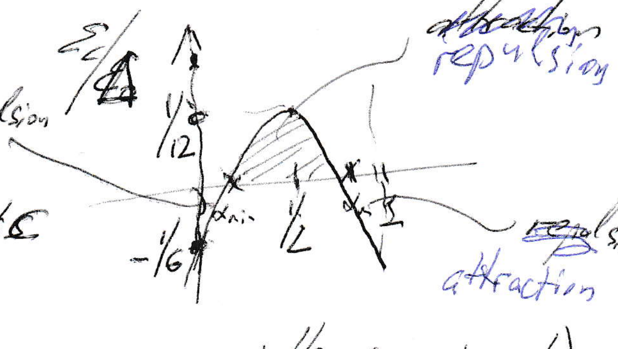
$B_n(x)$ — полиномы Бернулли

$$\mathcal{E}_C = \frac{2\pi}{L}\zeta(-1,\alpha)$$

$$\zeta(-1,\alpha) = -\frac{B_2(\alpha)}{2} \qquad B_2(\alpha) = \alpha^2 - \alpha + \frac{1}{6}$$

$$\mathcal{E}_C = -\frac{\pi}{L}\left(\alpha^2 - \alpha + \frac{1}{6}\right)$$ repulsion

$$\Delta = \frac{\pi \hbar c}{L}$$



$$\alpha_{min} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad (\mathcal{E}_C/\Delta)_m \overset{\alpha=1/2}{=} -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right) =$$

$$\alpha_{max} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad = -\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right) = +\frac{1}{12}$$

Притяжение: $\alpha_{min} < \frac{\Phi}{\Phi_0} < \alpha_{max}$

Отталкивание $0 < \frac{\Phi}{\Phi_0} < \alpha_{min}$, $\alpha_{max} < \frac{\Phi}{\Phi_0} < 1$

Квантование поля Дирака (фермионов $s=1/2$) и энергия вакуума

Ур-ния Дирака $(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$ $\qquad j_\mu = \bar\psi\gamma_\mu\psi$

$\bar\psi(i\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0$ $\qquad \partial_\mu j_\mu = 0$

Плотность Лагранжиана

$$\mathcal{L} = \bar\psi(i\gamma_\mu\overleftrightarrow{\partial}_\mu - m)\psi = \frac{i}{2}\left[\bar\psi\gamma_\mu(\partial_\mu\psi) - (\partial_\mu\bar\psi)\gamma_\mu\psi\right] - m\bar\psi\psi$$

$$\partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\bar\psi)} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\bar\psi} \Rightarrow -\frac{i}{2}\partial_\mu(\gamma_\mu\psi) = \frac{i}{2}\gamma_\mu(\partial_\mu\psi) - m\psi$$

$$\boxed{(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\psi = 0}$$

$$\partial_\mu\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta(\partial_\mu\psi)} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\psi} \Rightarrow (i\gamma_\mu\partial_\mu + m)\bar\psi = 0$$

Плотность тензора энергии-импульса

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{i}{2}\bar\psi\gamma_\mu\overleftrightarrow{\partial}_\nu\psi$$

Вторичное квантование фермионного поля

$$\psi = \sum_{p,\sigma}{}' \frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(a_{p\sigma}u_{p\sigma}e^{-ip_\mu x_\mu} + b^+_{p\sigma}u_{-p,-\sigma}e^{ip_\mu x_\mu}\right)$$

$$\bar\psi = \sum_{p\sigma}{}' \frac{1}{\sqrt{2E_p}}\left(a^+_{p\sigma}\bar u_{p\sigma}e^{ip_\mu x_\mu} + b_{p\sigma}\bar u_{-p,-\sigma}e^{-ip_\mu x_\mu}\right)$$

a, a^+, b, b^+ операторы рождения ("+") и уничтожения

$\{a_{k\sigma}, a^+_{k'\sigma'}\} = \delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'}$ $\qquad \{b_{k\sigma}, b^+_{k'\sigma'}\} = \delta_{kk'}\delta_{\sigma\sigma'}$

$\{A, B\} \equiv AB + BA$

("антикоммутатор")

для спиноров $u_{p\sigma}$ имеет соотношение $\bar u_{\pm p\sigma}\gamma_0 u_{\pm p\sigma} = 2E_p$
(нормировка)

В терминах операторов рождения и уничтожения гамильтониан имеет вид

(Средняя энергия $\int d\vec{x}\, \psi^+ H \psi = \int d\vec{x}\, \psi^+ (i \frac{\partial}{\partial t} \psi) =$
$= i \int d\vec{x}\, \bar{\psi} \gamma_0 \frac{\partial \psi}{\partial t}$)

(Подставляя разложение фермионного поля по плоским волнам и проведя интегрирование по координатам исходим)

$$H = \sum_{p,\sigma}{}' \varepsilon_p (a^+_{p,\sigma} a_{p,\sigma} - b_{p,\sigma} b^+_{p,\sigma}) =$$

$$= \sum_{p,\sigma}{}' \varepsilon_p (\hat{N}_{p,\sigma} + \hat{\bar{N}}_{p,\sigma} - 1)$$

$\hat{N}_{p,\sigma} = a^+_{p,\sigma} a_{p,\sigma}$

$\hat{\bar{N}}_{p,\sigma} = b^+_{p,\sigma} b_{p,\sigma}$

Энергия вакуума $|0\rangle$ $\quad \hat{N}|0\rangle = 0$

$\hat{\bar{N}}|0\rangle = 0$

$$E_0 = - \sum_{p,\sigma}{}' \varepsilon_p$$

$-1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ (вклад "дираковского моря" комплексного спинорного поля)

~~Когда~~ Энергия Казимира ~~безмассовых фермионов~~ фермионов на кольце

$\psi(x+L, t) = \psi(x, t)$

$\varepsilon_p = \hbar c |k_n|$ $\quad k_n = \frac{2\pi n}{L}$ $\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, ..$

$$E_C = -2 \frac{2\pi}{L} \hbar c \, \mathrm{Reg} \left(0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} n\right) =$$

(2s+1)-суммирование по "спину" (для вейлевских электронов в металлах

$$= -\frac{4\pi}{L} \hbar c \cdot 2\, \zeta_R(-1) = \frac{8\pi}{12} \frac{\hbar c}{L} = + \frac{2\pi}{3} \frac{\hbar c}{L}$$

$\zeta_R(-1) = -1/12$

положительная энергия

Сравнивая с аналогичным расчетом для действительного скалярного поля $-\frac{\hbar c}{L} \frac{\pi}{6}$ $\Rightarrow$ доп. множитель $-2 \cdot 2$
спин комплексн.

18

③ Уравнение Дирака. (представление Дирака, ковариантное представление). Преобразование Фолди-Воутхойзена

"Одночастичная" интерпретация ур-ния Клейна-Гордона-Фока ~~приводит~~ не позволяет интерпретировать волновую функцию как амплитуду вероятности обнаружения частицы.

Сохраняющийся ~~ток~~ 4-ток $j^\mu = \frac{i}{2m}(\psi^*\partial_\mu\psi - \psi\partial_\mu\psi^*)$

$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad \Big(\cancel{\partial_\mu\psi^*\partial_\mu\psi} + \psi^* \underbrace{\partial_\mu^2\psi}_{=-m^2\psi} - \cancel{\partial_\mu\psi\partial_\mu\psi^*} - \psi\underbrace{\partial_\mu^2\psi^*}_{=-m^2\psi^*} =$

$= -m^2|\psi|^2 + m^2|\psi|^2 = 0 \Big)$ приводит к неположительно определенной ~~плотности вероятности~~ $j_0 = \frac{i}{2m}(\psi^*\partial_t\psi - \psi\partial_t\psi^*)$, которая в отличие от ур-ния Шредингера, не может быть интерпретирована как плотность вероятности положения частицы. Это обстоятельство заставило Дирака искать новое ур-ние, содержащее только первую производную по времени ($\hbar = c = 1$)

$$i\cancel{\hbar}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{H}_D\psi \qquad \psi - \text{спинорная волновая функция} \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}$$

$$\cancel{D} = 1+3$$

Для свободной частицы $\hat{H}_D$ не зависит от координат (трансляционная inv) и должно быть линейно по оператору импульса

$$\hat{H}_D = \vec{\alpha}\hat{\vec{p}} + \beta m$$

$$\alpha_j,\ j=1,2,3 \ ,\ \beta - 4\times4 \text{ матрицы}$$

Т.к. релятивистское соотн. между энергией и импульсом
$E^2 = \vec{p}^2 + m^2$

$\cancel{E_D(+m)}$ $\quad E_D = \vec{\alpha}\hat{\vec{p}} + m\beta \qquad \cancel{E_D(-m) = \vec{\alpha}\hat{\vec{p}} - m\beta}$

$\cancel{E^2 = E_D(-m)E_D(+m) = \alpha_i p_i \alpha_k p_k - m^2\beta^2 + p_i m\alpha_i\beta - p_i m\beta\alpha_i}$

$\cancel{= \alpha_j^2 p_j^2 + \frac{1}{2}(\alpha_i\alpha_k + \alpha_k\alpha_i)p_ip_k + \frac{1}{2}(\alpha_i\alpha_k - \alpha_k\alpha_i)p_ip_k - \beta^2 m^2 + mp_i(\alpha_i\beta - \beta\alpha_i)}$ $\quad i\neq k$

$$(E-\vec{\alpha}\vec{p}-\beta m)(E+\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m)=$$

$$=E^2-\alpha_i\alpha_k p_i p_k-\beta^2 m^2-mp_i(\alpha_i\beta+\beta\alpha_i)=0$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\tfrac{1}{2}\{\alpha_i,\alpha_k\}+\cancel{\tfrac{1}{2}[\alpha_i,\alpha_k]}\right)p_ip_k$$

$$\{\alpha_i,\alpha_k\}=2\delta_{ik}\qquad \beta^2=1\qquad \{\alpha_i,\beta\}=0$$

$$\boxed{0=E^2-\vec{p}^{\,2}-m^2}\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\{\alpha_i,\alpha_k\}=2\delta_{ik}\\ \{\alpha_i,\beta\}=0\\ \beta^2=1\end{array}\right\}$$

Матрицы $\vec{\alpha}$ и β можно представить в виде

$$\boxed{\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}0&\vec{\sigma}\\ \vec{\sigma}&0\end{pmatrix}\qquad \beta=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix}}$$

$\alpha_j^+=\alpha_j$

$\beta^+=\beta$

$$\alpha_j\alpha_k=\begin{pmatrix}0&\sigma_j\\ \sigma_j&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\sigma_k\\ \sigma_k&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sigma_j\sigma_k&0\\0&\sigma_j\sigma_k\end{pmatrix}=\sigma_j\sigma_k\hat{I}$$

$$\alpha_k\alpha_j=\sigma_k\sigma_j\hat{I}\qquad \sigma_j\sigma_k=\delta_{jk}+i\varepsilon_{jkl}\sigma_l$$

$$\{\sigma_j,\sigma_k\}=2\delta_{jk}$$

$$\vec{\alpha}\beta=\begin{pmatrix}0&\vec{\sigma}\\ \vec{\sigma}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&-\vec{\sigma}\\ \vec{\sigma}&0\end{pmatrix}$$

$$\beta\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\vec{\sigma}\\ \vec{\sigma}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\vec{\sigma}\\-\vec{\sigma}&0\end{pmatrix}\Rightarrow \underline{\{\vec{\alpha},\beta\}=0}.$$

$\mathrm{Tr}\,\alpha_k=0\quad \mathrm{Tr}\,\beta=0.$ } Иногда это представление матриц называют представлением Дирака.

(2) Ковариантный вид записи ур-ния Дирака (пространственные ~~координаты~~ производные входят с матрицами α_i, временные - нет. Для ~~симметр~~ ковариантной записи умножим слева на матрицу β

$$(i\beta\partial_t\psi-\beta\vec{\alpha}\hat{\vec{p}}-m)\psi=0\qquad \hat{p}=-i\partial_j$$

$\gamma_0 \equiv \beta$

$\gamma_j = \beta\alpha_j$ $\quad \gamma_\mu = (\gamma_0, \gamma_j) \Rightarrow \boxed{(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\psi = 0}$

$\gamma_0^+ = \gamma_0 \quad \gamma_j^+ = \alpha_j\beta = -\beta\alpha_j = -\gamma_j$ — антиэрмитова матрица

$\gamma_1^2 = \gamma_2^2 = \gamma_3^2 = \beta\alpha_1\beta\alpha_1 = -1$

$$\boxed{\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}I}$$

Удобно ввести сопряженный спинор $\psi^+ = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$ и обозначение

$\bar\psi = \psi^+\gamma_0$, тогда $\boxed{\bar\psi(i\gamma_\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0}$

Легко видеть, что $j_\mu = \bar\psi\gamma_\mu\psi$ является сохраняющимся током (4-вектор плотности тока)

$$i\partial_\mu j_\mu = i\underbrace{(\partial_\mu\bar\psi)\gamma_\mu}_{-m\bar\psi}\psi + i\bar\psi\underbrace{\gamma_\mu\partial_\mu\psi}_{m\psi} = -m\bar\psi\psi + m\bar\psi\psi = 0.$$

Вводят также матрицу $\gamma_5 \equiv \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$

$$\boxed{\begin{aligned}&\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0\\ &\gamma_5^2 = -I\\ &\gamma_5^+ = -\gamma_5\end{aligned}}$$

$$\gamma_5^2 = \gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \quad (\gamma_0^2 = 1)$$
$$= -\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \gamma_2\gamma_3\gamma_2\gamma_3 = \quad (\gamma_j^2 = -1)$$
$$= -1$$

Матрицы Дирака линейно независимы, любая 4×4 матрица однозначно представляется в виде линейной комбинации 16 независимых матриц: $\hat\Gamma_j$

$$\hat M = \sum_{j=1}^{16} m_j \hat\Gamma_j$$

antisymmetric 4x4 tensor $(16-4)/2 = 6$

$\gamma_\mu, \quad \gamma_5, \quad \gamma_\mu\gamma_5 \quad [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad I$

$4 + 1 + 4 + 6 + 1 = 16$

③ Простейшие решения ур-ния Дирака

плоские волны $\psi = u(p)\, e^{-ip_\mu x^\mu} \Rightarrow e^{-iEt}\, u(p)\, e^{i\vec p \vec x}$

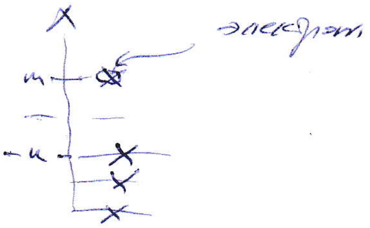
$$E\, u(p) = \underbrace{(\vec\alpha \vec p + \beta m)}_{\hat H(p)} u(p)$$

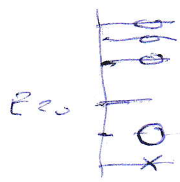
$$\hat H^2 = (\vec\alpha \vec p + \beta m)(\vec\alpha \vec p + \beta m) = \vec p^{\,2} + m^2$$

$$\Downarrow$$

$$E = \pm\sqrt{\vec p^{\,2} + m^2}\ ?$$

Наличие решений с отрицательными энергиями позволило Дираку предсказать античастицу (позитрон)

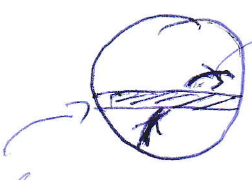




дырка в "море" Дирака — позитрон

Позитрон имеет положительную энергию (!!!) и заряд противоположный заряду электрона (+|e|)

Позитрон был открыт ~~[illegible]~~ в 1932 г. Андерсоном в опытах ~~[illegible]~~ с камерой Вильсона, помещенной в магнитное поле в космических лучах



более искривленная траектория в магнитном поле (меньшая скорость), следовательно можно было определить направление движения

свинцовая пластинка, после прохождения которой частица теряет энергию

За это наблюдение (Андерсон имел только один такой снимок трека) Андерсон получил Нобелевскую премию в 1936 г. (совместно с Гессом)

Hess (Innsbruck) for the discovery of cosmic radiation

C. Anderson, Pasadena, Cal. — for his discovery of the positron

В 1933 г. Dirac получил Нобелевскую премию (вместе с Э. Шредингером) "for the discovery of new productive forms of atomic theory"

Дирак предсказал также рождение из вакуума e^-e^+-пар (например при облучении γ-квантами с энергией $E_\gamma > 2m$)

$E>0$ ——— $E=0$

$2\gamma \rightleftarrows e^+e^-$ (есть, конечно, и обратный процесс — аннигиляция)

Вначале Дирак (ошибочно) считал, что частица с положительным зарядом — это протон. Далее Вейль строго показал, что частицы и античастицы имеют одинаковые массы $m_{e^-} = m_{e^+}$ (это следствие CPT-inv.)

Спиральность (helicity) $\quad S(p) = \frac{\vec\Sigma \vec p}{|p|} \quad \vec\Sigma = \begin{pmatrix} \vec\sigma & 0 \\ 0 & \vec\sigma \end{pmatrix}$

$$S^2(p) = 1 \Rightarrow S = \pm 1$$

Легко видеть, что $[H_D, S(p)] = 0$, поэтому решения свободного уравнения Дирака характеризуются знаком энергии ± 1 и знаком спиральности ± 1. (всего 4 независимых решения)

$D = 1+1 \Rightarrow$
$$H_D = \vec\alpha \hat p + \beta m \qquad \alpha = \sigma_1$$
$$H_D = \sigma_1 p + \sigma_3 m \qquad \beta = \sigma_3$$

В одномерном случае спин нельзя ввести как генератор группы вращений $\Leftrightarrow$ независимых решений 2 $\Rightarrow$ они характеризуют состояния с положительной и отрицательной энергией

$$(\sigma_1 p + \sigma_3 m)\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} m & p \\ p & -m \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\varphi \\ \chi\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} m\varphi + p\chi = E\varphi \\ p\varphi - m\chi = E\chi \end{cases}$$

$E^2 = p^2 + m^2$

$E^2 = (\sigma_1 p + \sigma_3 m)(\sigma_1 p + \sigma_3 m) =$
$= p^2 + m^2 + \cancel{pm(\sigma_1\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}$

$\varphi = \frac{E-m}{p}\chi$

$\varphi = \frac{E+m}{p}\chi \quad \underset{\chi \neq 0}{\Rightarrow} \quad E^2 - m^2 = p^2$

Найдем решения ур-ния Дирака, которые являются собственными значения оператора "знака" энергии

$$\hat{\Lambda}_{\pm} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \frac{\hat{H}_D}{\mathcal{E}_p}\right) \qquad \hat{\Lambda}_+ \psi_+ = \mathcal{E}_p \psi_+$$

проекторы на решения с положительной и отрицательной энергией

$$\hat{\Lambda}_+ \psi_- = 0$$

$$\Lambda_- \psi_+ = 0$$

$$\Lambda_- \psi_- = \mathcal{E}_p \psi_-$$

Найдем такое унитарное преобразование, что

$$UU^+ = U^+U = I \qquad H_D' = U H_D U^{-1} = \beta \mathcal{E}_p$$

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$$

(Foldy, Wouthuysen, 1950)

$$U = \frac{1}{\sqrt{2\mathcal{E}_p(\mathcal{E}_p+m)}}\left(\mathcal{E}_p + m + \beta \vec{\alpha}\vec{p}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{\mathcal{E}_p}{2(\mathcal{E}_p+m)}}\,\cancel{\frac{1}{2}}\left(1 + \beta\frac{H_D}{\mathcal{E}_p}\right)$$

$$UU^+ = \frac{2\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}_p+m}\,\frac{1}{4}\left(1 + \frac{\beta H_D}{\mathcal{E}_p}\right)\left(1 + H_D\beta\frac{1}{\mathcal{E}_p}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}_p+m}\left\{1 + \frac{1}{\mathcal{E}_p}(\beta H_D + H_D\beta) + \frac{1}{\mathcal{E}_p^2}\beta H_D^2 \beta\right\} =$$

$$\beta H_D + H_D \beta = -\cancel{\vec{\alpha}\vec{p}\beta} + m + \cancel{\vec{\alpha}\vec{p}\beta} + m = 2m$$

$$\beta H_D^2 \beta = \beta(p^2 + m^2)\beta = \mathcal{E}_p^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\mathcal{E}_p}{\mathcal{E}_p+m}\left(2 + \frac{2m}{\mathcal{E}_p}\right) = \frac{\mathcal{E}_p(\mathcal{E}_p+m)}{\mathcal{E}_p(\mathcal{E}_p+m)} = 1$$

$$\tilde{H}_D = \frac{2\varepsilon_p}{\varepsilon_p+m}\,\frac{1}{4}\left(1+\beta\frac{H_D}{\varepsilon_p}\right)H_D\left(1+\frac{1}{\varepsilon_p}H_D\beta\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_p+m}\left(H_D+\beta\frac{\varepsilon_p^{\cancel{2}}}{\cancel{\varepsilon_p}}\right)\left(1+\frac{1}{\varepsilon_p}H_D\beta\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_p+m}\left(H_D+\beta\frac{\varepsilon_p^{\cancel{2}}}{\cancel{\varepsilon_p}}+\beta\varepsilon_p+\beta H_D\beta\right) =$$

$$\beta(\vec{\alpha}\vec{p}+\beta m)\beta = -\vec{\alpha}\vec{p}+m\beta \qquad H_D^2=\vec{p}^{\,2}+m^2=\varepsilon_p^2$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_p+m}\left(\cancel{+\vec{\alpha}\vec{p}}+m\beta\cancel{-\vec{\alpha}\vec{p}}+m\beta+2\beta\varepsilon_p\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\varepsilon_p}{\cancel{\varepsilon_p+m}}\,\cancel{2}\beta\cancel{(\varepsilon_p+m)} = \beta\varepsilon_p \quad\Rightarrow\quad \boxed{H_{FW}=\beta\sqrt{\vec{p}^{\,2}+m^2}}$$

$$\varepsilon_p\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\\chi\end{pmatrix}=E_p\begin{pmatrix}\varphi\\\chi\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix}\varphi=\varphi & \varepsilon_p=+\varepsilon_p\\ \chi=\chi & \varepsilon_p=-\varepsilon_p\end{matrix}$$

Нормировка $\bar{\Psi}\gamma_0\Psi=\pm1 \Rightarrow |\varphi|^2-|\chi|^2=\pm1$

Оператор координаты в релятивистской кв. механике

Рассмотрим временную эволюцию оператора $\hat{x}$ для ур-ния Дирака

$$i\frac{dx_j}{dt} = [x_j, H_D] = \qquad H_D = \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m$$

$$= \alpha_k \underbrace{[x_j, p_k]}_{=\, i\delta_{jk}} + \beta \underbrace{[x_j, m]}_{=\,0} =$$

(кроме того $[v_j, v_k] \neq 0$)

$$\hat{\vec{v}} = \frac{d\hat{\vec{x}}}{dt} = \vec{\alpha} \Rightarrow \hat{v}^2_{x,y,z} = 1 \quad (v^2_{x,y,z} = c^2),$$

что означает что оператор $\Rightarrow$ не является оператором скорости частицы ($m \neq 0$ и собственные значения оператора скорости $v < c$) и, следовательно, $\hat{\vec{x}}$ не имеет физического смысла оператора координаты релятивистской частицы.

Можно использовать представление FW для нахождения оператора координаты релятивистской частицы. В представлении FW гамильтониан свободного фермиона имеет простой вид $H_{FW} = \beta E_p$ и поэтому оператор $\vec{x}$

$$i\dot{\vec{x}} = \beta[\vec{x}, \sqrt{\vec{p}^2 + m^2}] \Longrightarrow \beta i \frac{\partial E_p}{\partial \vec{p}}$$

в импульсном представлении $x_j = i\partial/\partial p_j$

$$v_j \equiv \dot{x}_j = \beta \frac{\partial E}{\partial p_j} \Rightarrow$$ обычный вид оператора скорости в импульсном представлении

Итак, в представлении FW $\vec{x}$ имеет смысл обычного оператора координаты (как в нерелятивистской QM). Тогда в представлении Дирака оператор "координаты" приобретает вид

$$X_j = U^{-1}_{FW}\, x_j\, U_{FW} = \sqrt{\frac{E_p}{2(E_p+m)}}\left(1 + \frac{H_D \beta}{E_p}\right) x_j \sqrt{\frac{E_p}{2(E_p+m)}}\left(1 + \beta\frac{H_D}{E_p}\right)$$

$$= \frac{\varepsilon_p}{2(\varepsilon_p+m)}\left\{\hat{x}_j + \frac{H_D\beta}{\varepsilon_p}\hat{x}_j + \frac{H_D\beta}{\varepsilon_p}\hat{x}_j\frac{\beta H_D}{\varepsilon_p} + \hat{x}_j\beta\frac{H_D}{\varepsilon_p}\right\} =$$

$\hat{x} \Rightarrow i\frac{\partial}{\partial p_j}$

в "p"-представлении

$$= \frac{\varepsilon_p}{2(\varepsilon_p+m)}\left\{\hat{x}_j + \frac{\overbrace{H_D\beta+\beta H_D}^{=2m}}{\varepsilon_p}\hat{x}_j + i\beta\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{H_D}{\varepsilon_p}\right) + \frac{H_D^2}{\varepsilon_p^2}\hat{x}_j + i\frac{H_D}{\varepsilon_p}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{H_D}{\varepsilon_p}\right)\right\}$$

$H_D^2 = \varepsilon_p^2$

$$= \frac{\varepsilon_p}{2(\varepsilon_p+m)}\left\{\hat{x}_j 2\frac{(\varepsilon_p+m)}{\varepsilon_p} + \tilde{M}_j(p)\right\}$$

$M_j(p)$ — 4×4 matrix

$$\tilde{M}_j(p) \equiv i\beta\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{H_D}{\varepsilon_p}\right) + i\frac{H_D}{\varepsilon_p}\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{H_D}{\varepsilon_p}\right) =$$

$$= \frac{i}{\varepsilon_p}(\varepsilon_p\beta + H_D)\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{H_D}{\varepsilon_p}\right)$$

$$\hat{X}_j = \hat{x}_j + M_j(p) \qquad \boxed{M_j(p) = \frac{i}{2(\varepsilon_p+m)}\left[(\varepsilon_p+m)\beta + \vec{\alpha}\vec{p}\right]\frac{\partial}{\partial p_j}\left(\frac{H_D}{\varepsilon_p}\right)}$$

Т.к. преобразование FW является унитарным, новый оператор координаты удовлетворяет нужным (каноническим) коммутационным соотношениям

$$[\hat{X}_j, \hat{X}_k] = 0 \qquad [\hat{X}_j, P_k] = i\delta_{jk}$$

$$i\frac{d\hat{X}_j}{dt} = [\hat{X}_j, H_D]$$

действительно в представлении FW

$$i\frac{dx_j}{dt} = [x_j, \beta\varepsilon_p] = i\beta\frac{\partial}{\partial p_j}\varepsilon_p$$

$$x_j = U\hat{X}_j U^{-1} \qquad H_D = U\beta U^{-1}\varepsilon_p$$

В представлении FW порознь сохраняются спиновый и орбитальный моменты $\vec{\Sigma} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$, $\vec{L} = [\vec{x}\times\vec{p}]$

$$[\vec{\Sigma}, \beta] = 0 \qquad [\hat{L}, \beta\varepsilon_p] \Rightarrow \beta\,\varepsilon_{jkl}[\hat{x}_k p_l, \varepsilon_p] = \beta i\,\varepsilon_{jkl}\left[\frac{\partial}{\partial p_k}p_l, \varepsilon_p\right] = 0$$

антисимметричный тензор

Поэтому в представлении Дирака отдельно сохраняется (26)
орбитальный момент $\hat{\vec{L}} = \vec{\hat{x}} \times \vec{p}$ и "средний спин"
$$\vec{\Sigma}_{FW} = U_{FW} \vec{\Sigma} U_{FW}^{-1}$$

Преобразование FW удобно ~~при~~ для расчета релятивистских поправок по $1/c$ т.к. матричная функция $M_j \to 0$ при $m \to \infty$

<u>Уравнение Дирака во внешнем э.м. поле</u>

$$\hat{p}_\mu \Rightarrow \hat{p}_\mu - eA_\mu$$

$$\{ i\gamma_\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m \} \psi = 0 \qquad A_\mu = (\underset{\varphi}{\underset{\parallel}{A_0}}, \vec{A})$$

$$\{ i\gamma_0 (\partial_t - ieA_0) - i\vec{\gamma}(\vec{\nabla} - ie\vec{A}) - m \} \psi = 0$$

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = [\hat{\vec{\alpha}}(\hat{\vec{p}} - e\vec{A}) + \beta m + e\varphi] \psi$$

векторный потенциал скалярный потенциал

$$\boxed{H_D = \vec{\alpha}(\vec{p} - e\vec{A}) + \beta m + U}$$

~~Положим~~ ~~$U=0$~~ Квадрируем $H_D - U = \tilde{H}_D$

$$\tilde{H}_D^2 = (\alpha_j \pi_j + \beta m)(\alpha_k \pi_k + \beta m) =$$

$$= \alpha_j \alpha_k \pi_j \pi_k + m\pi_j (\underbrace{\alpha_j \beta + \beta \alpha_j}_{0}) + m^2 =$$

$$\alpha_j \alpha_k = \delta_{jk} + i\varepsilon_{jkl} \sigma_l I$$

$$\hat{\pi}_j \hat{\pi}_k = \frac{1}{2}[\hat{\pi}_j, \hat{\pi}_k] + \frac{1}{2}\{\hat{\pi}_j, \hat{\pi}_k\}$$

$$= \vec{\pi}^2 + \frac{i}{2}\varepsilon_{jkl}\sigma_l [\hat{\pi}_j, \hat{\pi}_k] + m^2$$

$$[\hat{p}_j - e\hat{A}_j, \hat{p}_k - eA_k] = -e[\hat{p}_j, A_k] - e[A_j, \hat{p}_k] =$$ (27)

$$= -e\cancel{(\hat{p}_j A_k - A_j \hat{p}_k) = +ei\,\partial\ (-i)\,\partial_j A_k}$$

$$= -e(\underbrace{\hat{p}_j A_k - A_k \hat{p}_j}_{-i\frac{\partial A_k}{\partial x_j}} + \underbrace{A_j \hat{p}_k - \hat{p}_k A_j}_{+i\frac{\partial A_j}{\partial x_k}}) = -ie\underbrace{\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_j}\right)}_{F_{kj}} =$$

$$= +ieF_{jk}$$

$$\tilde{H}_D^2 = (\vec{p} - e\vec{A})^2 + \frac{ie}{2}\varepsilon_{jkl}F_{jk}\sigma_l + m^2 = (\vec{p} - e\vec{A})^2 + m^2 + e\vec{\sigma}\vec{H}$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ij}F_{ij} = H}$$

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon_{ljk}F_{jk} = \hat{H}_l$$

$$\left\{\boxed{\tilde{H}_D^2 = (\hat{p} - e\vec{A})^2 + e\vec{\sigma}\vec{H} + m^2}\right\}$$

~~В ковариантном виде~~ В нерелятивистском пределе

$$\tilde{H}_D = m\left\{1 + \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{m^2} + \frac{e}{m^2}\vec{\sigma}\vec{H}\right\}^{1/2} \simeq$$

$$= m + \frac{1}{2m}(\vec{p} - e\vec{A})^2 + \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\vec{H}$$

$$H_{Pauli} = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + \frac{e\hbar}{2mc}\vec{\sigma}\vec{H}$$

В ковариантном виде квадрированный оператор Дирак $i\gamma_\mu D_\mu - m$, $D_\mu = \hat{p}_\mu - eA_\mu$

$$\left[(p_\mu - eA_\mu)^2 + \frac{1}{2}\frac{e\hbar}{c}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\right]\chi = m^2\chi$$

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2i}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*\right)$$

$$j = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*\right) \qquad \nabla j + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Паули-Вайскопф $\Rightarrow$ правильная интерпретация ур-ния KG

$$i\hbar \dot{x} = [x, H] = [x, \alpha_x p_x + \beta m] = \alpha_x [x, p_x] = \alpha_x i\hbar$$

$$\boxed{\dot{x} = c\alpha_x} \qquad \dot{x}^2 = c^2$$

Следовательно, собственные значения "скорости" равны $\pm c$. Поэтому оператор $\vec{r}$ не является оператором координаты релятивистской частицы

Zitterbewegung (дрожательное движение, Шредингер)

$$\dot{\alpha}_x = \frac{1}{i\hbar}[\alpha_x, H] = \frac{1}{i\hbar}[\alpha_x, \vec{\alpha}\vec{p} + \beta m] = \qquad \{\alpha_i, \beta\} = 0, \quad \{\alpha_i, \alpha_k\} = 2\delta_{ik}$$

$$= \cancel{\frac{1}{i\hbar}(m\alpha_x\beta - \beta\alpha_x)} \qquad \alpha_x H - H\alpha_x = 2\alpha_x H - 2p_x =$$

$$\Rightarrow \frac{2}{i\hbar}(\alpha_x H - c p_x)$$

$$\ddot{\alpha}_x = \frac{2}{i\hbar} H \dot{\alpha}_x = -\frac{2}{i\hbar}\dot{\alpha}_x H \qquad \dot{\alpha}_x = \dot{\alpha}_x(0)\, e^{-\frac{2i}{\hbar}Ht} = -e^{+\frac{2iHt}{\hbar}}\dot{\alpha}_x(0)$$

$$\alpha_x H H^{-1} = \frac{i\hbar}{2}\dot{\alpha}_x H^{-1} + c p_x H^{-1} \qquad H^2 = E^2 \quad H^{-1} =$$

$$H H^{-1} = E^2 H^{-2} \qquad \boxed{H^{-1} = \frac{H}{E^2}}$$

$$\alpha_x(t) = \underbrace{\frac{i\hbar}{2}\dot{\alpha}_x(0)\, e^{-\frac{2iHt}{\hbar}} \frac{H}{E^2}}_{\text{колебания с частотой}} + \frac{c p_x H}{E^2}$$

$$\omega_z = \frac{2H}{\hbar} \approx \frac{2mc^2}{\hbar} \Rightarrow$$ для всех типов элементарных частиц эта частота очень большая

Показать, что

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{r} + \frac{i\hbar}{2mc}\beta\vec{\alpha}\right) = \frac{\beta \vec{p}}{m}}$$

Вычислим коммутатор L_x

$$\dot{l}_x = \frac{1}{i\hbar}[l_x, H] = \frac{1}{i\hbar}\left[(yp_z - zp_y),\ c\vec\alpha\vec p + \beta mc^2\right] =$$

$$= \frac{c}{i\hbar}\Big(\alpha_y p_z \underbrace{[y, p_y]}_{i\hbar} - p_y \underbrace{[z, p_z]}_{i\hbar}\Big) = c\, l_x$$

$$\frac{d\vec l}{dt} = c\,\vec\alpha\times\vec p$$ } для релятивистского электрона орбитальный момент не является интегралом движения

$$\dot\Sigma_j = \frac{1}{i\hbar}\left[\Sigma_j, c\vec\alpha\vec p + \beta m\right] = \frac{c}{i\hbar}p_k[\Sigma_j, \alpha_k] = \frac{p_k}{i\hbar}[\Sigma_j, \alpha_k] = \frac{p_k}{i\hbar}\left[\begin{pmatrix}\sigma_j & 0\\ 0 & \sigma_j\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \sigma_k\\ \sigma_k & 0\end{pmatrix}\right] =$$

$$= 2i\,\varepsilon_{jkl}\, c\, \frac{p_k}{i\hbar}\begin{pmatrix}0 & \sigma_l\\ \sigma_l & 0\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec\Sigma} = \frac{2c}{\hbar}(\vec p\times\vec\alpha)$$

$$\frac{d\vec L}{dt} = \frac{d\vec l}{dt} + \frac{\hbar}{2}\dot{\vec\Sigma} = c(\vec\alpha\times\vec p) + c(\vec p\times\vec\alpha) = 0$$

$$= \left[\vec r\times\vec p + \frac{\hbar}{2}\vec\Sigma,\ H\right]$$

$$\boxed{\vec L = \vec l + \vec S}$$ ← полный момент

Плоские волны: $\psi_p = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon}}\, u_p\, e^{-ipx}$ — биспинорная амп.

$$\left.\begin{aligned}\bar u_p u_p &= 2m\\ \bar u_{-p} u_{-p} &= -2m\end{aligned}\right\}$$ нормировка

$$\vec j = \bar\psi_{\pm p}\,\vec\gamma\,\psi_{\pm p} = \frac{1}{2\varepsilon}\bar u_{\pm p}\,\vec\gamma\, u_{\pm p} = \frac{\vec p}{\varepsilon} = \vec v = \frac{d\varepsilon}{d\vec p}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\vec p^{\,2} + m^2}$$

$$\left\{\begin{aligned}(\gamma_\mu p_\mu - m)\,u_p &= 0\\ (\gamma_\mu p_\mu + m)\,u_{-p} &= 0\end{aligned}\right.$$ ур-ние для биспиноров $u_{\pm p}$

"1/c" – разложение

$$\left\{ \sigma(c\vec p - e\vec A)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + mc^2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\}\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = (E - e\varphi)\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \vec\sigma(c\vec p - e\vec A)\psi_B + mc^2\psi_A = (E - e\varphi)\psi_A \\ \vec\sigma(c\vec p - e\vec A)\psi_A - mc^2\psi_B = (E - e\varphi)\psi_B \end{cases}$$

$$E = E' + mc^2$$

$$\psi_B = (E' + 2mc^2 - e\varphi)^{-1}\vec\sigma(c\vec p - e\vec A)\psi_A$$

в нерел. приближении $E' \ll mc^2$, $e\varphi \ll mc^2$ $\vec p \simeq m\vec v$

$$\psi_B \sim \frac{v}{c}\psi_A \ll \psi_A$$

$\cancel{(\vec\sigma(c\vec p - e\vec A))}^2$ положим $\varphi = 0$

$$\frac{[\vec\sigma(c\vec p - e\vec A)]^2}{E' + 2mc^2 - \cancel{e\varphi}}\psi_A = (E' - \cancel{e\varphi})\psi_A \qquad E' \ll mc^2$$

$$\hat H_P = \frac{[\vec\sigma(\vec p - \frac{e}{c}\vec A)]^2}{2m} = \underbrace{\frac{(\vec p - \frac{e}{c}\vec A)^2}{2m} + \frac{e\hbar}{2mc}\vec\sigma\vec B}_{\text{Pauli Hamiltonian}}$$

$$\sigma_j\sigma_k = \delta_{jk} + i\varepsilon_{jkl}\sigma_l$$

$$\Rightarrow \; + \frac{i\varepsilon_{jkl}\sigma_l}{2m}\frac{1}{2}\left[p_j - \frac{e}{c}A_j, p_k - \frac{e}{c}A_k\right] = \qquad p_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$= \frac{i}{2m}\varepsilon_{jkl}\sigma_l\left(-\frac{e}{c}\right)(p_jA_k - A_kp_j) =$$

$$= \frac{\hbar}{2m}\left(-\frac{e}{c}\right)\frac{1}{2}\varepsilon_{jkl}F_{jk} = -\frac{\hbar e}{2mc}\vec\sigma\vec B$$

с точностью до $(v/c)^2$, $\varphi \neq 0$ ②

$c=1$ $\hbar=1$

$$H = \beta\Big[\underbrace{m + \frac{(\vec p - e\vec A)^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3}}_{\sqrt{(p-eA)^2+m^2}\ \approx}\Big] + e\varphi - \beta\frac{e}{2m}\vec\sigma\cdot\vec B$$

$$\underbrace{-\frac{ie}{8m^2}\vec\sigma\cdot\mathrm{rot}\,\vec E - \frac{e\hbar}{4m^2c^2}\vec\sigma(\vec E\times\vec p)}_{\text{spin-orbital interaction}} - \underbrace{\frac{e\hbar^2\,\mathrm{div}\,\vec E}{8m^2c^2}}_{\text{Darwin term}}$$

$$\partial_k r_\ell = \partial_k r_\ell f(r^2) = \delta_{k\ell} f(r^2) + 2 r_\ell r_k f'(r^2)$$

$\vec E = \vec E(r)$ $\quad \varepsilon_{jk\ell}\partial_k E_\ell = \varepsilon_{jk\ell}\left(\delta_{k\ell} f(r^2) + 2 r_\ell r_k f'(r^2)\right) = 0$

$$(\sigma_j \varepsilon_{jk\ell} E_k p_\ell)^+ = \sigma_j p_\ell E_k \varepsilon_{jk\ell} = \sigma_j E_k p_\ell \varepsilon_{jk\ell} + \frac{1}{i}\sigma_j \varepsilon_{jk\ell}\partial_\ell E_k =$$

$$H_{SO}^+ = +\frac{ie}{8m^2}\vec\sigma\,\mathrm{rot}\,\vec E - \frac{e}{4m^2}\vec\sigma(\vec p\times\vec E) = \cancel{\frac{ie}{8m^2}\vec\sigma\,\mathrm{rot}\,\vec E - \frac{ie}{8m^2}\vec\sigma\,\mathrm{rot}\,\vec E} - \frac{e}{4m^2}\vec\sigma(\vec E\times\vec p)$$

$$= \frac{1}{i}\sigma_j\frac{1}{2}\varepsilon_{jk\ell}(\partial_\ell E_k - \partial_k E_\ell)$$

$\vec E = \frac{\vec r}{r}$ $\quad \vec E = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec r$ $\quad \vec E = -\vec\nabla\phi = -\frac{\partial\phi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\vec r}r$, $\frac{\vec r}{r}$

$$H_{SO} = +\frac{e}{4m^2}\vec\sigma(\vec E\times\vec p) = \frac{e}{4m^2}\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}\vec\sigma\vec\ell$$

$\vec\ell = \vec r\times\vec p$

Дарвиновский вклад обязан дрожанию электрона

добавка к электрическому потенциалу $\langle\delta\phi\rangle = \langle\phi(r+\delta r) - \phi(r)\rangle =$

$$= \left\langle \delta\vec r\frac{\partial\phi}{\partial\vec r} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\delta r_i\,\delta r_j\frac{\partial^2\phi}{\partial r_i\partial r_j}\right\rangle \approx \frac{1}{6}\langle\delta r^2\rangle\nabla^2\phi$$

$E = -\nabla\phi$ $\quad \mathrm{div}\,E = -\nabla^2\phi$

$\langle\delta\vec r\rangle = 0$ $\quad \langle\delta\vec r^2\rangle \sim \frac{1}{m^2}$

1

Уравнения Вейля

Рассмотрим ур-ние Дирака для фермиона с массой $m=0$

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} = \cancel{\ldots}\;-i\vec{\alpha}\vec{\nabla}\psi \qquad (\text{спектр } \varepsilon_p = c|\vec{p}|)$$

$\{\alpha_j, \alpha_k\} = 2\delta_{jk}$ в этом случае (нет матрицы β антикоммутирующей со всеми матрицами α_j) алгебру матриц α_j можно реализовать с помощью матриц Паули σ_j. Тогда ψ — двухкомпонентный спинор

Имеется две возможности $\alpha_j = \sigma_j$ и

$\alpha_j = -\sigma_j$

$$\left.\begin{aligned} i\frac{\partial\varphi}{\partial t} &= \vec{\sigma}\hat{\vec{p}}\varphi \\ i\frac{\partial\chi}{\partial t} &= -\vec{\sigma}\hat{\vec{p}}\chi \end{aligned}\right\} \text{ур-ния Вейля}$$

Для плоских волн $\varphi, \chi \sim u_p e^{-ip_\mu x^\mu}$

$$|\vec{p}|\varphi = \vec{\sigma}\hat{\vec{p}}\varphi \qquad \varphi = \frac{\vec{\sigma}\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|}\varphi \qquad \frac{\vec{\sigma}\hat{\vec{p}}}{p} = \hat{S}(p)$$

$$\hat{S}^2 = 1 \qquad S = \pm 1$$

$$|\vec{p}|\chi = -\vec{\sigma}\hat{\vec{p}}\chi \qquad \chi = -\frac{\vec{\sigma}\hat{\vec{p}}}{|\vec{p}|}\chi \quad -1$$

Состояния фермионов с $m=0$ всегда являются киральными

$S=-1$ (отвечает $\overset{\vec{\sigma}}{\longleftarrow}\underset{p}{\longrightarrow}$ "нейтрино")

$S=+1$ ($\overset{\vec{\Sigma}}{\longrightarrow}\longrightarrow$ "антинейтрино")

Эти уравнения могут быть записаны для биспиноров ψ при дополнительном условии — заданной спиральности

$\gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \qquad \gamma_5^+ = \gamma_5 \qquad \gamma_5^2 = 1 \qquad \{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

в представлении Дирака $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$

В ~~спинорном~~ киральном представлении $\gamma_5 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & -\vec{\sigma}\end{pmatrix}$ $\beta = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$$\frac{1+\gamma_5}{2}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi\\ 0\end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ оператор проектирования

$$\frac{1-\gamma_5}{2}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \chi\end{pmatrix}$$

$$\gamma_\mu \hat{p}_\mu \psi = 0 \Rightarrow \frac{1+\gamma_5}{2}\psi = \psi \Rightarrow \boxed{\gamma_5\psi = \psi}$$

при замене $\psi \to \frac{1+\gamma_5}{2}\psi$ дираковски сопряженный спинор $\bar{\psi} \to \bar{\psi}\frac{1-\gamma_5}{2}$

$$j_\mu = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \Longrightarrow \frac{1}{4}\bar{\psi}(1+\gamma_5)\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi =$$
$$= \frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma_\mu(1+\gamma_5)^2\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu(1+\gamma_5)\psi$$
$$1+2\gamma_5+\gamma_5^2 = 2(1+\gamma_5) \qquad \boxed{\partial_\mu j_\mu = 0}$$

$\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \Rightarrow$ вектор $\vec{x} \to -\vec{x}$

$\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi \Rightarrow$ псевдовектор (не меняет знак при отражении (аксиальный вектор) координат

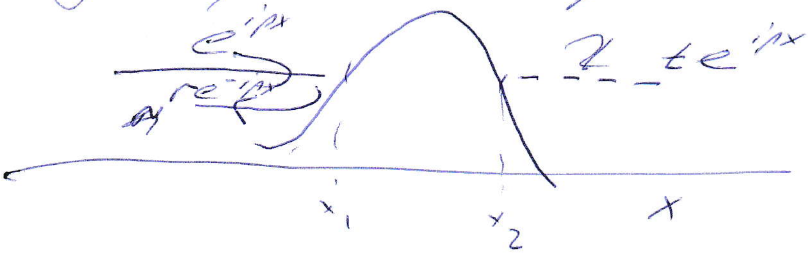
В слабых взаимодействиях, в которых участвуют нейтрино P-четность не сохраняется (переход от одной киральности к другой означает переход от частиц к античастицам)

1

Парадокс Клейна (O. Klein, 1929)

Релятивистский электрон с энергией $E \gg mc^2$ нельзя "удержать" потенциальными барьерами. ~~...~~ При нормальном падении на плоский потенциальный барьер, вероятность прохождения через такой барьер ~~...~~ не зависит для безмассовых частиц ($m=0$) ни от энергии, ни от формы барьера и $P=1$

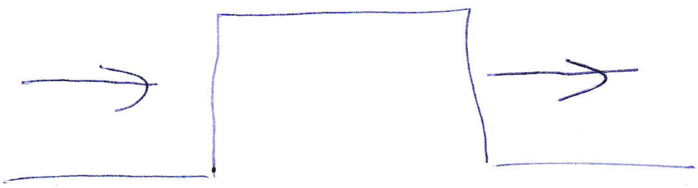
Туннелирование в нерелятивистской кв. механике



$$T = |t|^2 \sim \exp\left\{-2\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{2m(U(x)-E)}\,dx\right\}$$

$T \ll 1$ (для $E \ll U_m$)

Ультрарелят. случай ($m=0$)



(1D) или нормальное падение на прямоугольный потенциал)

$T = 1$

(не зависит от формы барьера и энергии электрона)

~~Качествен~~ Формальное объяснение $\Rightarrow$ сохранение спиральности (при отражении назад от "немагнитного" барьера $S(p) = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|p|}$ меняет знак, что невозможно — противоречит теории относительности, для безмассовых фермионов $S = \pm 1$

$\overrightarrow{S}\ \overrightarrow{p}$ $S=+1$ $\qquad$ $\overrightarrow{S}\ \overleftarrow{p}$ $S=-1$)

По-существу, в одномерном пространстве безмассовый электрон в произвольном статическом потенциале $V(x)$ движется как ~~в~~ свободный электрон. Это означает что ~~пот~~ электростатический потенциал $V(x)$ может быть убран унитарным преобразованием гамильтониана

$D = 1+1$

$$\underset{D}{H} = \underline{\alpha}_1 \hat{p}_x + V(x)$$

$$\underset{D}{\tilde{H}} = U \underset{D}{H} U^{-1} = \underline{\alpha}_1 \hat{p}_x \qquad \text{пусть } \underline{\alpha}_1 = \underline{\sigma}_1$$

$$U = e^{i\underline{\sigma}_1 \alpha(x)} \qquad UU^{-1} = I$$

$$\underline{\sigma}_1 U \hat{p}_x U^{-1} = -i\underline{\sigma}_1 U\left(\frac{d}{dx} U^{-1}\right) + \overset{=I}{UU^{-1}} \underline{\sigma}_1 \hat{p}_x$$

$$V(x) = iU\left(\frac{d}{dx}U^{-1}\right)\underline{\sigma}_1 \qquad \frac{d}{dx} e^{-i\underline{\sigma}_1 \alpha(x)} =$$

$$= e^{-i\underline{\sigma}_1 \alpha(x)}(-i\underline{\sigma}_1 \alpha'(x))$$

$$V(x) = UU^{-1}(-i^2)\underline{\sigma}_1^2 \alpha'(x)$$

$$\alpha'(x) = V(x)$$

$$\boxed{\alpha(x) = \int^x V(x')dx'}$$

При падении на двумерный прямоугольный барьер под углом θ коэффициент прохождения даже для безмассовой частицы ~~уже~~ становится функцией θ и, вообще говоря, энергии налетающей частицы (эта зависимость — осциллирующая)