

**Квантова механіка. Фізичний факультет, 3 курс, 6 семестр.**

*Заняття №4. Математичний апарат квантової механіки: Обчислення середніх значень операторів. Елементи теорії зображень. Дискретне зображення. Безперервне зображення.*

1. Перевірка д/з.

**Задача 1.** Знайти оператор, ермітово спряжений до оператора  $e^{i\varphi\hat{\sigma}_j}$ .

**Задачі 2-3.** Знайти ВФ та ВЗ матриць  $\hat{\sigma}_+ = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;  $\hat{\sigma}_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ .

2. Обчислення середніх значень операторів.

$$\text{Def. : } \bar{A} = (\psi, \hat{A}\psi), \quad \overline{A^2} = (\psi, \hat{A}^2\psi),$$

$$\overline{\Delta A^2} = \overline{(\hat{A} - \bar{A})^2} = \overline{A^2} - (\bar{A})^2, \quad \delta A = \sqrt{\overline{\Delta A^2}}.$$

**Задача 4.** У стані, що описується хвильовою функцією

$$\psi(x) = C \exp\left[\frac{ip_0x}{\hbar} - \frac{(x-x_0)^2}{2a^2}\right],$$

де  $p_0, x_0, a$  – дійсні параметри, знайти функцію розподілу по координатам частинки.

Визначити  $\bar{x}, \overline{x^2}, \bar{p}, \overline{p^2}, \overline{\Delta x^2}, \overline{\Delta p^2}, \delta x, \delta p, \delta x \cdot \delta p$ . (ГКК № 1.19)

Довідка:  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \alpha > 0.$

3. Елементи теорії зображень.

3.1. Дискретне зображення.

$$\hat{L}^\dagger = \hat{L}, \quad \hat{L}\psi_n = \lambda_n\psi_n; \quad (\psi_m, \psi_n) = \delta_{mn}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x) = \sum_n C_n \psi_n; \\ C_n = (\psi_n, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n^*(x) \psi(x) dx; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_n \psi_n^*(x') \psi_n(x) = \delta(x-x'); \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^*(x) \psi_n(x) dx = \delta_{mn}. \end{array} \right.$$

$\{C_n\}$  – функція  $\psi(x)$  в дискретному  $L$ -зображенні,

$A_{mn} = (\psi_m, \hat{A}\psi_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_m^*(x) \hat{A}\psi_n(x) dx$  - матриця оператора  $\hat{A}$  в дискретному  $L$ -зображенні.

$L_{mn} = \lambda_n \delta_{mn}$  - матриця оператора  $\hat{L}$  у власному дискретному зображенні.

$$\hat{A}\psi(x) = \tilde{\psi}(x) \rightarrow \sum_n A_{mn} C_n = \tilde{C}_m, \quad C_n = (\psi_n, \psi), \quad \tilde{C}_m = (\psi_n, \tilde{\psi})$$

**Задача 5.** Записати матриці Паулі  $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$  у зображенні ВФ матриці  $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y$ .

3.2. Неперервні зображення.

$$\hat{L}^\dagger = \hat{L}, \quad \hat{L}\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda; \quad (\psi_\lambda, \psi_{\lambda'}) = \delta(\lambda - \lambda').$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(\lambda)\psi_\lambda(x)d\lambda \\ C(\lambda) = (\psi_\pi, \psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\lambda^*(x)\psi(x)dx; \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\lambda^*(x')\psi_\lambda(x)d\lambda = \delta(x - x'); \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\lambda'}^*(x)\psi_\lambda(x)dx = \delta(\lambda - \lambda'); \end{array} \right.$$

$C(\lambda)$  – функція  $\psi(x)$  в неперервному  $L$ -зображенні,

$A(\lambda, \lambda') = (\psi_\lambda, \hat{A}\psi_{\lambda'}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\lambda^*(x)\hat{A}\psi_{\lambda'}(x)dx$  – ядро оператора  $\hat{A}$  в дискретному  $L$ -зображенні.

$L(\lambda, \lambda') = \lambda\delta(\lambda - \lambda')$  – ядро оператора  $\hat{L}$  у власному зображенні.

$$\hat{A}\psi(x) = \tilde{\psi}(x) \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda, \lambda')C(\lambda')d\lambda' = \tilde{C}(\lambda), \quad C(\lambda) = (\psi_\lambda, \psi), \quad \tilde{C}(\lambda') = (\psi_{\lambda'}, \tilde{\psi}).$$

$\hat{L}C(\lambda) = \lambda C(\lambda)$  оператор  $\hat{L}$  у власному неперервному зображенні – це оператор множення.

4. Дельта-функція Дірака – ядро одиничного оператора. Властивості функції Дірака.

$$Def: \quad \psi(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\delta(x - a)dx;$$

$$\delta(-x) = \delta(x); \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1; \quad \delta(\alpha x) = \frac{1}{|\alpha|} \delta(x);$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx = \delta(k); \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk = \delta(x).$$

**Задачі 6-7.** Знайти вид операторів координати та імпульсу в імпульсному зображенні.

Довідка: ВФ оператора імпульсу  $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ , нормовані на  $\delta$ -функцію, мають вид

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}.$$

**5. Самостійна робота** (~ 20 хвилин). Робота складається з двох завдань: 1-е завдання «коштує» 10 балів, 2-е завдання - 10 балів, у сумі можна набрати максимум **20 балів**.

**Домашнє завдання:** ГКК №№ 1.19 (закінчити), 1.22-1.25, 1.30, 1.42, 1.44, 1.45, 1.46\*, 1.47\*, 1.48\*, 1.54-1.59, 1.67\*, Гр. № 32.

ГКК - Галицький Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981; Гр. - Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике, 1984

ЕК - Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантовая механика, 1976

\*) – задачі обов'язкові для студентів групи Ф037