

Квантова механіка. Фізичний факультет, 3 курс, 6 семестр.

Заняття №3. *Математичний апарат квантової механіки: Функція від оператора (продовження). Оператори-матриці в просторі E_n . Властивості матриць Паулі.*

1. Перевірка д/з.

Задачі 1-2. Знайти власні функції і власні значення операторів

$$-i \frac{d}{d\varphi}, \quad -\frac{d^2}{d\varphi^2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

2. Функції від оператора.

Задача 3. Довести співвідношення: якщо $[\hat{A}, \hat{B}] = i\alpha$, то $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-i\alpha/2}$. (ЕК Гл. 1 № 3)

3. Простір E_n . Оператори-матриці.

3.1. Одинична матриця $\delta_{i,k}$

3.2. Ермітово спряжена матриця $(L^\dagger)_{ik} = L_{ki}^*$.

3.3. Ермітова матриця $L_{ik} = L_{ki}^*$

3.4. Унітарна матриця $\sum_{i=1}^n U_{ik}^* U_{im} = \delta_{km}$, $\sum_{i=1}^n U_{ki}^* U_{mi} = \delta_{km}$, $|\text{Det} U_{ik}| = 1$.

4. Матриці Паулі в просторі E_2 .

$$\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z); \quad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Перевірити ермітовість та унітарність матриць $\hat{\sigma}_j$. Виразити $\hat{\sigma}_j^2$.

Задача 5. Знайти комутатори $[\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k]$ та антикомутатори $[\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k]_+$

Задача 6. Зайти ВФ та ВЗ матриць $\hat{\sigma}_j$.

Задача 7. Знайти явний вигляд операторів $e^{i\varphi\hat{\sigma}_j}$. Яким є сенс матриці $e^{i\varphi\hat{\sigma}_y}$?

5. **Самостійна робота** (~ 20 хвилин). Робота складається з двох завдань: 1-е завдання - 5 балів, 2-е завдання - 10 балів, в сумі можливо набрати максимум **15 балів**.

Домашнє завдання: ЕК Гл.1 № 11; ГКК № 1.34(в,г); для матриць $\sigma_\pm = \hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ виразити $[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm]$, $\hat{\sigma}_\pm^2$, $[\sigma_+, \sigma_-]$, $[\sigma_+, \sigma_-]_+$

1. Знайти власні значення та власні функції ермітового оператора в E_2

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\text{ЕК Гл.1 № 11})$$

2. Знайти власні значення та власні функції неермітового оператора

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ГКК № 1.34(в,г)})$$

3. Для матриць $\sigma_{\pm} = \hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ знайти комутатори

$$[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_{\pm}], \quad \hat{\sigma}_{\pm}^2, \quad [\sigma_+, \sigma_-], \quad [\sigma_+, \sigma_-]_+.$$

ГКК - Галицький Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи з квантової механіки, 1981; Гр. - Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике, 1984

ЕК - Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантовая механика, 1976