

Квантовая механика. Физический факультет, 3 курс, 6 семестр.

Занятие №3. Математический аппарат квантовой механики: Функция от оператора (продолжение). Операторы-матрицы в пространстве E_n . Свойства матриц Паули.

1. Проверка д/з.

Задачи 1-2. Найти собственные функции и собственные значения операторов

$$-i \frac{d}{d\varphi}, \quad -\frac{d^2}{d\varphi^2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

2. Функция от оператора.

Задача 3. Доказать соотношение: если $[\hat{A}, \hat{B}] = i\alpha$, то $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-i\alpha/2}$. (ЕК Гл. 1 № 3)

3. Пространство E_n . Операторы-матрицы.

3.1. Единичная матрица $\delta_{i,k}$

3.2. Эрмитово сопряженная матрица $(L^\dagger)_{ik} = L_{ki}^*$.

3.3. Эрмитова матрица $L_{ik} = L_{ki}^*$

3.4. Унитарная матрица $\sum_{i=1}^n U_{ik}^* U_{im} = \delta_{km}$, $\sum_{i=1}^n U_{ki}^* U_{mi} = \delta_{km}$, $|\text{Det} U_{ik}| = 1$.

4. Матрицы Паули в пространстве E_2 .

$$\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z); \quad \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4. Проверить эрмитовость и унитарность матриц $\hat{\sigma}_j$. Вычислить $\hat{\sigma}_j^2$.

Задача 5. Найти коммутаторы $[\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k]$ и антикоммутаторы $[\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_k]_+$

Задача 6. Найти СФ и СЗ матриц $\hat{\sigma}_j$.

Задача 7. Найти явный вид операторов $e^{i\varphi\hat{\sigma}_j}$. Каков смысл матрицы $e^{i\varphi\hat{\sigma}_y}$?

5. **Самостоятельная работа** (~ 20 минут). Работа состоит из двух заданий: 1-е задание «стоит» 5 баллов, 2-е задание - 10 баллов, в сумме можно набрать максимум **15 баллов**.

Домашнее задание: ЕК Гл.1 № 11; ГКК № 1.34(в,з); для матриц $\sigma_\pm = \hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ вычислить

$$[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm], \quad \hat{\sigma}_\pm^2, \quad [\sigma_+, \sigma_-], \quad [\sigma_+, \sigma_-]_+$$

1. Найти СФ и СЗ эрмитова оператора в E_2 : (ЕК Гл. 1 №11)

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \hat{L}^\dagger = \hat{L}.$$

2. Найти СФ и СЗ следующих неэрмитовых операторов E_2 : (ГКК 1.34 (в,г))

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Для матриц $\sigma_\pm = \hat{\sigma}_x \pm i\hat{\sigma}_y$, $\hat{\sigma}_z$ вычислить $[\hat{\sigma}_z, \hat{\sigma}_\pm]$, $\hat{\sigma}_\pm^2$, $[\sigma_+, \sigma_-]$, $[\sigma_+, \sigma_-]_+$

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981; Гр. - Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике, 1984
ЕК - Елютин П.В., Кривченков В.Д. Квантовая механика, 1976