

Квантова механіка. Фізичний факультет, 3 курс, 6 семестр.

Заняття №2. Математичний апарат квантової механіки: Дії з операторами. Знаходження власних функцій і власних значень ермітових та неермітових операторів. Функція від оператора.

1. Дії з операторами.

**Задачі 1-6.** Розкрити дужки в операторних виразах:  $(\hat{A} + \hat{B})^2$ ,  $(\hat{A} - \hat{B})^3$ ,

$$\hat{x}^2 \frac{\hat{d}}{dx}, \quad \frac{\hat{d}}{dx} \hat{x}^2, \quad \hat{x} \frac{\hat{d}^2}{dx^2}, \quad \frac{\hat{d}^2}{dx^2} \hat{x}$$

**Задача 7.** Розрахувати комутатор  $\left[ \hat{x}_i, \frac{\hat{\partial}}{\partial x_k} \right]$ , де  $i, k = 1, 2, 3$  або  $x, y, z$

**Задача 8.** Розрахувати комутатор  $[\hat{A}, \hat{B}^n]$ , якщо комутатор  $[\hat{A}, \hat{B}] = 1$ .

**Задача 9.** З'ясувати, які з перерахованих нижче операторів є ермітовими, антиермітовими, унітарними:

$$\hat{L}\hat{L}^\dagger, \quad \hat{L}^\dagger\hat{L}, \quad \hat{L} + \hat{L}^\dagger, \quad \hat{L} - \hat{L}^\dagger, \quad i(\hat{L} + \hat{L}^\dagger), \quad i(\hat{L} - \hat{L}^\dagger),$$

$$\hat{x}, \quad \frac{\hat{d}}{dx}, \quad i \frac{\hat{d}}{dx}, \quad \frac{d^2}{dx^2}, \quad \Delta, \quad \hat{x} \pm \frac{\hat{d}}{dx}, \quad \hat{I}, \quad \hat{T}_a, \quad \hat{P}_{12}$$

(Def:  $\hat{L}^\dagger = \hat{L}$  - ермітовий оператор,  $\hat{L}^\dagger = -\hat{L}$  - антиермітовий оператор,

$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = 1$  - унітарний оператор)

2. Знайти власні функції і власні значення операторів (Гр. № 23, № 24, ГКК №1.34(а,б))

$$\frac{\hat{d}}{dx}, \quad i \frac{\hat{d}}{dx}, \quad \frac{d^2}{dx^2}, \quad \hat{x} + \frac{\hat{d}}{dx}, \quad \hat{x} - \frac{\hat{d}}{dx}$$

3. Визначення функції від оператора:  $\hat{F}(\hat{f}) = \sum_n C_n \hat{f}^n$ ,  $\hat{F}(z) = \sum_n C_n z^n$ .

**Задача 10.** Знайти явний вигляд операторів:

1.  $e^{i\phi\hat{I}}$ ,  $\hat{I}$  - оператор інверсії; 2.  $e^{a\frac{d}{dx}}$  (ГКК № 1.12)

**Задача 11.** Показати, що якщо  $\hat{A}$  - ермітовий оператор, то  $e^{i\hat{A}}$  - унітарний оператор (ГКК № 1.59)

**Домашнє завдання:** Гр. №№ 11, 12, 23-29, 31; ЕК Гл.1 №№ 3, 7, 8, 10, ГКК №№1.13, 1.14.

1. Знайти оператори ермітового спряження операторам  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$  (Гр. № 11)

2. Закінчити Гр. № 23, № 24, ГКК №1.34(а,б).

3. Знайти власні функції і власні значення операторів  $\frac{d}{d\varphi}$ ,  $i\frac{d}{d\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  (Гр. № 25, № 27)

4. Знайти власні функції і власні значення операторів  $\sin\left(\frac{d}{d\varphi}\right)$   $0 \leq \varphi < 2\pi$  (Гр. № 26)

5. Знайти власні функції і власні значення операторів  $\exp\left(i\alpha\frac{d}{d\varphi}\right)$   $0 \leq \varphi < 2\pi$  (Гр. № 28)

6. Знайти власні функції і власні значення операторів  $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}$  (Гр. № 29)

7. Знайти комутатор операторів знищення  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} + i\hat{p})$  та народження

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} - i\hat{p}). \text{ (Гр. № 31)}$$

8. Нехай  $\hat{A}_1 = \frac{1}{4}(\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2)$ ,  $\hat{A}_2 = \frac{1}{4}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)$ ;  $\hat{A}_3 = \frac{i}{4}(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger)$ ;  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ .

Розрахувати комутатори  $[\hat{A}_i, \hat{A}_k]$ ,  $i, k = 1, 2, 3$ . (ЕК Гл. 1, № 7)

9. Нехай  $\hat{C}_1 = \frac{1}{2}(\hat{c} + \hat{c}^\dagger)$ ;  $\hat{C}_2 = \frac{1}{2}(\hat{c}^\dagger - \hat{c})$ ;  $\hat{C}_3 = \frac{1}{2}(\hat{c}^\dagger\hat{c} - \hat{c}\hat{c}^\dagger)$ ;  $\hat{c}^\dagger\hat{c} + \hat{c}\hat{c}^\dagger = 1$ ;  $\hat{c}^2 = 0$ .

Розрахувати комутатори  $[\hat{C}_i, \hat{C}_k]$ ,  $i, k = 1, 2, 3$ . (ЕК Гл. 1, № 10)

10. Вважаючи  $\lambda$  малою величиною, знайти розкладання оператора  $(\hat{A} - \lambda\hat{B})^{-1}$  за ступенями  $\lambda$ . (ГКК №№1.13)

11. Довести наступні співвідношення:  $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$

(ГКК №№1.14)

12. Довести співвідношення: якщо  $[\hat{b}, \hat{a}] = i\lambda$ , то

$$\exp\left[x(\hat{a} + \hat{b})\right] = \exp(x\hat{b})\exp(x\hat{a})\exp\left(-\frac{i\lambda x^2}{2}\right).$$