

**Квантовая механика. Физический факультет, 3 курс, 6 семестр.**

*Занятие №2. Математический аппарат квантовой механики: Действия с операторами. Нахождение собственных функций и собственных значений эрмитовых и неэрмитовых операторов. Функция от оператора.*

1. Действия с операторами.

**Задачи 1-6.** Раскрыть скобки в операторных выражениях:  $(\hat{A} + \hat{B})^2$ ,  $(\hat{A} - \hat{B})^3$ ,

$$\hat{x}^2 \frac{\hat{d}}{dx}, \quad \frac{\hat{d}}{dx} \hat{x}^2, \quad \hat{x} \frac{\hat{d}^2}{dx^2}, \quad \frac{\hat{d}^2}{dx^2} \hat{x}$$

**Задача 7.** Вычислить коммутатор  $\left[ \hat{x}_i, \frac{\hat{\partial}}{\partial x_k} \right]$ , где  $i, k = 1, 2, 3$  или  $x, y, z$

**Задача 8.** Вычислить коммутатор  $[\hat{A}, \hat{B}^n]$ , если коммутатор  $[\hat{A}, \hat{B}] = 1$ .

**Задача 9.** Выяснить, какие из перечисленных ниже операторов являются эрмитовыми, антиэрмитовыми, унитарными:

$$\hat{L}\hat{L}^\dagger, \quad \hat{L}^\dagger\hat{L}, \quad \hat{L} + \hat{L}^\dagger, \quad \hat{L} - \hat{L}^\dagger, \quad i(\hat{L} + \hat{L}^\dagger), \quad i(\hat{L} - \hat{L}^\dagger),$$

$$\hat{x}, \quad \frac{\hat{d}}{dx}, \quad i\frac{\hat{d}}{dx}, \quad \frac{d^2}{dx^2}, \quad \Delta, \quad \hat{x} \pm \frac{\hat{d}}{dx}, \quad \hat{I}, \quad \hat{T}_a, \quad \hat{P}_{12}$$

**(Def:**  $\hat{L}^\dagger = \hat{L}$  - эрмитов оператор,  $\hat{L}^\dagger = -\hat{L}$  - антиэрмитов оператор,

$\hat{U}\hat{U}^\dagger = \hat{U}^\dagger\hat{U} = 1$  - унитарный оператор)

2. Найти собственные функции и собственные значения операторов (Гр. № 23, № 24, ГКК №1.34(a,б))

$$\frac{\hat{d}}{dx}, \quad i\frac{\hat{d}}{dx}, \quad \frac{d^2}{dx^2}, \quad \hat{x} + \frac{\hat{d}}{dx}, \quad \hat{x} - \frac{\hat{d}}{dx}$$

3. Определение функции от оператора:  $\hat{F}(\hat{f}) = \sum_n C_n \hat{f}^n$ ,  $\hat{F}(z) = \sum_n C_n z^n$ .

**Задача 10.** Найти явный вид операторов:

1.  $e^{i\varphi\hat{I}}$ ,  $\hat{I}$  - оператор инверсии;      2.  $e^{a\frac{d}{dx}}$  (ГКК № 1.12)

**Задача 11.** Показать, что если  $\hat{A}$  - эрмитов оператор, то  $e^{i\hat{A}}$  - унитарный оператор (ГКК № 1.59)

**Домашнее задание:** Гр. №№ 11, 12, 23-29, 31; ЕК Гл.1 №№ 3, 7, 8, 10, ГКК №№1.13, 1.14.

1. Найти операторы эрмитово сопряженные операторам  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial^n}{\partial x^n}$  (Гр. № 11)

2. Закончить Гр. № 23, № 24, ГКК №1.34(а,б).

3. Найти собственные функции и собственные значения операторов  $\frac{d}{d\varphi}$ ,  $i\frac{d}{d\varphi}$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$   
(Гр. № 25, № 27)

4. Найти собственные функции и собственные значения операторов  $\sin\left(\frac{d}{d\varphi}\right)$   $0 \leq \varphi < 2\pi$  (Гр. № 26)

5. Найти собственные функции и собственные значения операторов  $\exp\left(i\alpha\frac{d}{d\varphi}\right)$   $0 \leq \varphi < 2\pi$   
(Гр. № 28)

6. Найти собственные функции и собственные значения операторов  $\frac{d^2}{dx^2} + \frac{2}{x}\frac{d}{dx}$  (Гр. № 29)

7. Найти коммутатор операторов уничтожения  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} + i\hat{p})$  и рождения

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{x} - i\hat{p}). \text{ (Гр. № 31)}$$

8. Пусть  $\hat{A}_1 = \frac{1}{4}(\hat{a}^2 + (\hat{a}^\dagger)^2)$ ,  $\hat{A}_2 = \frac{1}{4}(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger)$ ;  $\hat{A}_3 = \frac{i}{4}(\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}\hat{a}^\dagger)$ ;  $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ .

Вычислить коммутаторы  $[\hat{A}_i, \hat{A}_k]$ ,  $i, k = 1, 2, 3$ . (ЕК Гл. 1, № 7)

9. Пусть  $\hat{C}_1 = \frac{1}{2}(\hat{c} + \hat{c}^\dagger)$ ;  $\hat{C}_2 = \frac{1}{2}(\hat{c}^\dagger - \hat{c})$ ;  $\hat{C}_3 = \frac{1}{2}(\hat{c}^\dagger\hat{c} - \hat{c}\hat{c}^\dagger)$ ;  $\hat{c}^\dagger\hat{c} + \hat{c}\hat{c}^\dagger = 1$ ;  $\hat{c}^2 = 0$ .

Вычислить коммутаторы  $[\hat{C}_i, \hat{C}_k]$ ,  $i, k = 1, 2, 3$ . (ЕК Гл. 1, № 10)

10. Предполагая  $\lambda$  малой величиной, найти разложения оператора  $(\hat{A} - \lambda\hat{B})^{-1}$  по степеням  $\lambda$ .  
(ГКК №№1.13)

11. Доказать следующее соотношение:  $e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} = \hat{B} + [\hat{A}, \hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A}, [\hat{A}, \hat{B}]] + \dots$   
(ГКК №№1.14)

12. Доказать соотношение: если  $[\hat{b}, \hat{a}] = i\lambda$ , то

$$\exp\left[x(\hat{a} + \hat{b})\right] = \exp(x\hat{b})\exp(x\hat{a})\exp\left(-\frac{i\lambda x^2}{2}\right).$$