

Квантова механіка. Фізичний факультет, 3 курс, 6 семестр.

Заняття №1. Математичний апарат квантової механіки: Лінійна алгебра, теорія лінійних просторів, теорія лінійних операторів.

1. Визначення лінійного (афінного) простору. Приклади лінійних просторів.
2. Лінійна комбінація векторів. Лінійна залежність та лінійна незалежність векторів. Розмірність лінійного простору. Базис.
3. Евклідові простори. Скалярний добуток. Нормування и ортогональність векторів. Ортонормований базис. Приклади скалярних добутків.
4. Гілбертів простір. Простір L^2 . Поняття повної системи функцій для нескінченномірних просторів.
5. Визначення лінійного оператора $\hat{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \hat{L}f + \beta \hat{L}g$.

Задача 1. Перевірити лінійність наступних операторів (з ГКК № 1.1):

- а) $\hat{I}\psi(x) = \psi(-x)$ – оператор інверсії (відображення);
 - б) $\hat{T}_a\psi(x) = \psi(x + a)$ – оператор трансляції (зсув);
 - в) $\hat{M}_c\psi(x) = \sqrt{C}\psi(Cx)$, $C > 0$ – оператор змінення масштабу;
 - г) $\hat{K}\psi(x) = \psi^*(x)$ – оператор комплексного спряження;
 - д) $\hat{P}_{12}\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$ – оператор перестановки двох координат.
6. Способи задання лінійних операторів: правило відповідності, інтегральна форма, матрична форма.
 7. Операції з операторами.
 - 7.1. Одиничний оператор, нульовий оператор.
 - 7.2. Сума операторів.
 - 7.3. Добуток операторів.
 - 7.4. Комутатор двох операторів.
 - 7.5. Протилежний оператор. Нормальний оператор.

Задача 2. Знайти оператор, протилежний до добутку операторів \hat{A} и \hat{B} , $(\hat{A}\hat{B})^{-1}$ – ?

7.6. Визначення ермітово спряженого оператора.

Задачі 3-5. Показати, що $(\hat{L}^\dagger)^\dagger = \hat{L}$; $(\alpha\hat{L})^\dagger = \alpha^* \hat{L}^\dagger$; $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$.

7.7. Визначення ермітового оператора.

7.8. Визначення унітарного оператора.

8. Рівняння на власні функції (ВФ) і власні значення (ВЗ):

$$\hat{A}\psi = \lambda\psi$$

8.1. Властивості ВЗ и ВФ ермітового оператора.

8.2. Властивості ВЗ унітарного оператора.

Задача 6. Розкрити дужки в операторному виразі $\left(x + \frac{d}{dx}\right)^2$ (Гр. №8(a))

Домашнє завдання: ГКК 1.1-1.10, Гр. №8, №9

1. Для всіх операторів з задачі ГКК 1.1 (див. **задачу 1**) знайти ермітово спряжені та зворотні оператори.

2. Знайти оператори, ермітово спряжені до операторів:

а) $\frac{d}{dx}$, $i\frac{d}{dx}$, $-\infty < x < \infty$; б) $i\frac{\partial}{\partial r}$, $0 \leq r < \infty$ (ГКК 1.2)

3. Перевірити ермітовість наступних операторів:

а) $\hat{L}^\dagger \hat{L}$, $\hat{L} \hat{L}^\dagger$, $\hat{L} + \hat{L}^\dagger$, $i(\hat{L} - \hat{L}^\dagger)$ (ГКК 1.3)

б) $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$, $i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$, якщо \hat{A} и \hat{B} – ермітові оператори. (ГКК 1.6)

4. Показати, що якщо \hat{C} – ермітовий оператор, то оператор $\hat{G} = \hat{A}\hat{C}\hat{A}^\dagger$ також є ермітовим. (ГКК 1.4)

5. Показати, що довільний оператор можна представити у вигляді $\hat{F} = \hat{A} + i\hat{B}$, де \hat{A} и \hat{B} – ермітові оператори. (ГКК 1.5)

6. Оператор \hat{F} неермітовий. В якому випадку оператор \hat{F}^2 є ермітовим? (ГКК 1.7)

7. Показати, що при алгебраїчних діях з комутаторами справедливий закон дистрибутивності, тобто що комутатор суми дорівнює сумі комутаторів $\hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$ (ГКК 1.8)

$$\left[\sum_i \hat{A}_i, \sum_k \hat{B}_k \right] = \sum_{i,k} [\hat{A}_i, \hat{B}_k].$$

8. Показати, що

$$[\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B};$$

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}; \text{ (ГКК 1.9)}$$

9. Довести тотожність Якобі для комутаторів операторів $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$:

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0.$$

10. Розкрити дужки в операторних виразах (Гр. № 8(б-е)):

$$\text{б) } \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{x}\right)^3; \quad \text{в) } \left(x\frac{d}{dx}\right)^2; \quad \text{г) } \left(\frac{d}{dx}x\right)^2; \quad \text{д) } [i\hbar\nabla + \vec{A}(\vec{r})]^2;$$

$$\text{е) } (\hat{L} - \hat{M})(\hat{L} + \hat{M}).$$

11. Знайти комутатори операторів:

$$\text{а) } x \text{ та } \frac{d}{dx}; \quad \text{б) } i\hbar\nabla \text{ та } \vec{A}(\vec{r}); \quad \text{в) } \frac{\partial}{\partial\varphi} \text{ та } f(r, \theta, \varphi). \text{ (Гр. № 9)}$$

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981
Гр. - Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике, 1984