

**Квантовая механика. Физический факультет, 3 курс, 6 семестр.**

**Занятие №1. Математический аппарат квантовой механики: Линейная алгебра, теория линейных пространств, теория линейных операторов.**

1. Определение линейного (аффинного) пространства. Примеры линейных пространств.
2. Линейная комбинация векторов. Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Размерность линейного пространства. Базис.
3. Евклидовы пространства. Скалярное произведение. Нормировка и ортогональность векторов. Ортонормированный базис. Примеры скалярных произведений.
4. Гильбертово пространство. Пространство  $L^2$ . Понятие полной системы функций для бесконечномерных пространств.
5. Определение линейного оператора  $\hat{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \hat{L}f + \beta \hat{L}g$ .

**Задача 1.** Проверить линейность следующих операторов (из ГКК № 1.1):

- а)  $\hat{I}\psi(x) = \psi(-x)$  – оператор инверсии (отражения);
  - б)  $\hat{T}_a\psi(x) = \psi(x + a)$  – оператор трансляции (сдвига);
  - в)  $\hat{M}_c\psi(x) = \sqrt{C}\psi(Cx)$ ,  $C > 0$  – оператор изменения масштаба;
  - г)  $\hat{K}\psi(x) = \psi^*(x)$  – оператор комплексного сопряжения;
  - д)  $\hat{P}_{12}\psi(x_1, x_2) = \psi(x_2, x_1)$  – оператор перестановки двух координат.
6. Способы задания линейных операторов: правило соответствия, интегральная форма, матричная форма.
  7. Действия с операторами.
    - 7.1. Единичный оператор, нулевой оператор.
    - 7.2. Сумма операторов.
    - 7.3. Произведение операторов.
    - 7.4. Коммутатор двух операторов.
    - 7.5. Обратный оператор. Нормальный оператор.

**Задача 2.** Найти оператор, обратный к произведению операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ ,  
 $(\hat{A}\hat{B})^{-1}$  – ?

7.6. Определение эрмитово сопряженного оператора.

**Задачи 3-5.** Показать, что  $(\hat{L}^\dagger)^\dagger = \hat{L}$ ;  $(\alpha\hat{L})^\dagger = \alpha^* \hat{L}^\dagger$ ;  $(\hat{A}\hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$ .

7.7. Определение эрмитова оператора.

7.8. Определение унитарного оператора.

8. Уравнение на собственные функции (СФ) и собственные значение (СЗ)

$$\hat{A}\psi = \lambda\psi.$$

8.1. Свойства СЗ и СФ эрмитова оператора.

8.2. Свойства СЗ унитарного оператора.

**Задача 6.** Раскрыть скобки в операторном выражении  $\left(x + \frac{d}{dx}\right)^2$  (Гр. №8(a))

**Домашнее задание:** ГКК 1.1-1.10, Гр. №8, №9

1. Для всех операторов из задачи ГКК 1.1 (см. **задачу 1**) найти эрмитово сопряженные и обратные операторы.

2. Найти операторы, эрмитово сопряженные к операторам:

а)  $\frac{d}{dx}$ ,  $i\frac{d}{dx}$ ,  $-\infty < x < \infty$ ; б)  $i\frac{\partial}{\partial r}$ ,  $0 \leq r < \infty$  (ГКК 1.2)

3. Проверить эрмитовость следующих операторов:

а)  $\hat{L}^\dagger \hat{L}$ ,  $\hat{L} \hat{L}^\dagger$ ,  $\hat{L} + \hat{L}^\dagger$ ,  $i(\hat{L} - \hat{L}^\dagger)$  (ГКК 1.3)

б)  $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ ,  $i(\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A})$ , если  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  – эрмитовы операторы. (ГКК 1.6)

4. Показать, что если  $\hat{C}$  – эрмитов оператор, то оператор  $\hat{G} = \hat{A}\hat{C}\hat{A}^\dagger$  также является эрмитовым. (ГКК 1.4)

5. Показать, что произвольный оператор можно представить в виде  $\hat{F} = \hat{A} + i\hat{B}$ , где  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$  – эрмитовы операторы. (ГКК 1.5)

6. Оператор  $\hat{F}$  неэрмитов. В каком случае оператор  $\hat{F}^2$  является эрмитовым? (ГКК 1.7)

7. Показать, что при алгебраических действиях с коммутаторами справедлив закон дистрибутивности, т.е. что коммутатор суммы равен сумме коммутаторов  $\hat{B}[\hat{A}, \hat{C}]$  (ГКК 1.8)

$$\left[ \sum_i \hat{A}_i, \sum_k \hat{B}_k \right] = \sum_{i,k} [\hat{A}_i, \hat{B}_k].$$

8. Показать, что

$$\begin{aligned} [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] &= \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}; \\ [\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] &= \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C}; \end{aligned} \quad (\text{ГКК 1.9})$$

9. Доказать тождество Якоби для коммутаторов операторов  $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ :

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0.$$

10. Раскрыть скобки в операторных выражениях (Гр. № 8(б-е)):

б)  $\left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{x}\right)^3$ ; в)  $\left(x\frac{d}{dx}\right)^2$ ; г)  $\left(\frac{d}{dx}x\right)^2$ ; д)  $[i\hbar\nabla + \vec{A}(\vec{r})]^2$ ;

е)  $(\hat{L} - \hat{M})(\hat{L} + \hat{M})$ .

11. Найти коммутаторы операторов:

а)  $x$  и  $\frac{d}{dx}$ ; б)  $i\hbar\nabla$  и  $\vec{A}(\vec{r})$ ; в)  $\frac{\partial}{\partial\varphi}$  и  $f(r, \theta, \varphi)$ . (Гр. № 9)

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981  
Гр. - Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике, 1984