

**Квантовая механика. Физический факультет, 4 курс, 7 семестр.**

**Занятие №13. Теория возмущений (ТВ): нестационарная ТВ.**

1. Подготовка к контрольной работе (ректорский контроль). В работе будет 3 задания:

1. теоретический вопрос из «Квантового минимума» (3 балла); 2. Задача на вычисление коммутатора (3 балла); 3. Задача на одномерное движение (4 балла). Максимальная оценка – 10 баллов.

2. Теория возмущений (окончание).

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}; \quad \hat{H}_0 \psi_n^{(0)} = E_n^{(0)} \psi_n^{(0)};$$

$\hat{H}_0$  – основной гамильтониан, для которого известно точное решение стационарного уравнения Шредингера,  $\hat{V}$  – оператор возмущения.

$$\frac{\partial \hat{V}}{\partial t} = 0 \text{ – стационарная ТВ (см. занятие № 12), } \frac{\partial \hat{V}}{\partial t} \neq 0 \text{ – нестационарная ТВ.}$$

3. Нестационарная ТВ.

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(q,t)}{\partial t} = (\hat{H}_0 + \hat{V}(t)) \Psi(q,t);$$

$$\Psi(q,t) = \sum_k a_k(t) \Psi_k^{(0)}(q,t); \quad \Psi_k^{(0)}(q,t) = \psi_k^{(0)}(q) e^{-iE_k^{(0)}t/\hbar},$$

$$i\hbar \frac{da_m}{dt} = \sum_k V_{mk}(t) a_k,$$

$$V_{mk}(t) = (\Psi_m^{(0)}, \hat{V} \Psi_k^{(0)}) = V_{mk} e^{i\omega_{mk}t}, \quad \omega_{mk} = \frac{E_m^{(0)} - E_k^{(0)}}{\hbar}$$

$$a_{kn} \approx \delta_{k,n} + a_{kn}^{(1)}(t), \quad a_{kn}^{(1)} = -\frac{i}{\hbar} \int V_{kn} e^{i\omega_{kn}t} dt.$$

3.1. Вероятность перехода под влиянием возмущения, действующего в течение конечного времени

$$w_{k \leftarrow n} = |a_{kn}^{(1)}|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} V_{kn} e^{i\omega_{kn}t} dt \right|^2.$$

**Задача 1.** На частицу, находящуюся при  $t \rightarrow -\infty$  в основном состоянии в бесконечно глубокой яме ширины  $a$  ( $0 < x < a$ ), накладывается слабое однородное поле, изменяющееся

во времени по закону  $V(x,t) = -x F_0 e^{-t^2/\tau^2}$ . Вычислить в первом порядке ТВ вероятности возбуждения различных состояний частицы при  $t \rightarrow \infty$ . (ГКК № 8.23 (а))

4. Обсуждение индивидуальных расчетных заданий. Сведения о спецфункциях, которые могут быть полезными при выполнении этих заданий.

#### 4.1. Гипергеометрическая функция.

Гипергеометрический ряд (обобщение понятия геометрической прогрессии)

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1} z + \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot \beta \cdot (\beta + 1)}{\gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot 1 \cdot 2} z^2 + \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot (\alpha + 2) \cdot \beta \cdot (\beta + 1) \cdot (\beta + 2)}{\gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot (\gamma + 2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 + \dots;$$

Ряд сходится при  $|z| \leq 1$ , является симметричным по  $\alpha, \beta$ . Ряд обрывается, если  $\alpha$  или  $\beta$  является целым отрицательным числом. Это одно из решений гипергеометрического уравнения

$$z(1-z) \frac{d^2 U}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z] \frac{dU}{dz} - \alpha\beta U = 0.$$

Два линейно независимых решения в случае, когда  $\gamma$  не является целым числом,

$$U_1(z) = F(\alpha, \beta, \gamma, z);$$

$$U_2(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, z).$$

Через гипергеометрическую функцию выражаются полные эллиптические интегралы, интегралы от цилиндрических функций, полиномы Лежандра, функции Лежандра, шаровые функции и присоединенные полиномы Лежандра, полиномы Чебышева, полиномы Якоби. Например,

$$P_n(z) = \frac{(2n-1)!!}{n!} z^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2} - n, \frac{1}{z^2}\right);$$

$$P_n(\cos \varphi) = F(n+1, -n, 1, \sin^2 \varphi).$$

#### 4.2. Вырожденная гипергеометрическая функция.

Вырожденный гипергеометрический ряд

$$F(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{z}{1!} + \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1)}{\gamma \cdot (\gamma + 1)} \cdot \frac{z^2}{2!} + \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot (\alpha + 2)}{\gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot (\gamma + 2)} \cdot \frac{z^3}{3!} + \dots;$$

Ряд сходится при  $|z| \leq 1$ . Ряд обрывается, если  $\alpha$  является целым отрицательным числом. Это одно из решений вырожденного гипергеометрического уравнения

$$z \frac{d^2 U}{dz^2} + (\gamma - z) \frac{dU}{dz} - \alpha U = 0.$$

Если  $\gamma$  не является целым числом, то два линейно независимых решения вырожденного гипергеометрического уравнения имеют вид:

$$U_1(z) = F(\alpha, \gamma, z);$$

$$U_2(z) = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, 2 - \gamma, z).$$

Через вырожденную гипергеометрическую функцию выражаются интеграл вероятности, интегралы от цилиндрических функций, полиномы Эрмита, полиномы Лягерра.

Подробнее о свойствах гипергеометрической функции и вырожденной гипергеометрической функции можно узнать в справочниках: И.С.Градштейн, И.М.Рыжик «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений», А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев «Интегралы и ряды. Специальные функции. Т. 2», М.Абрамовиц, И.Стиган «Справочник по специальным функциям», а также в математических дополнениях в учебнике «Квантовая механика» Л.Д.Ландау, И.М.Лифшица.

**Домашнее задание** . ГКК 8.23(б, в)–8.26.

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981; ЛЛ – Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика