

**Квантовая механика. Физический факультет, 4 курс, 7 семестр.**

*Занятие №11. Движение в центральном поле: сферические волны, частица в сферически симметричной прямоугольной яме конечной глубины*

1. Проверка д/з.

**Задача 1.** Найти  $\langle r^{-1} \rangle$  в состоянии, описываемом волновой функцией  $\psi(r, \theta, \varphi) = Ae^{-r}$ .

Чему равняются в этом состоянии  $\langle \hat{L}^2 \rangle$  и  $\langle \hat{L}_z \rangle$ ?

2. Гамильтониан частицы, которая движется в центральном поле

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi} \right] + U(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 \hat{l}^2}{2\mu r^2} + U(r);$$

$$\Delta_{\theta\varphi} = \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] = -\hat{l}^2.$$

**Задача 2.** Исследовать стационарные состояния свободной частицы с определенной энергией, определенным моментом  $l$  и его проекцией  $m$  (сферические волны). (см. ЛЛ § 33)

Коммутационные соотношения для  $\hat{H}, \hat{l}^2, \hat{l}_z$ :

$$\left[ \hat{H}, \hat{l}^2 \right] = 0, \quad \left[ \hat{H}, \hat{l}_z \right] = 0, \quad \left[ \hat{l}^2, \hat{l}_z \right] = 0.$$

Разделение переменных:  $\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ .

Уравнение для радиальной части волновой функции  $R(r)$  при  $U(r) = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} R(r) = ER(r).$$

Важные соотношения:  $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rR) = \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr}$

Замена:

$$R(r) = \frac{\chi(r)}{\sqrt{r}}; \quad R'(r) = \frac{\chi'(r)}{\sqrt{r}} - \frac{1}{2} \frac{\chi(r)}{r\sqrt{r}}; \quad R''(r) = \frac{\chi''(r)}{\sqrt{r}} - \frac{\chi'(r)}{r\sqrt{r}} + \frac{3}{4} \frac{\chi(r)}{r^2\sqrt{r}}.$$

Решение:  $\psi_{klm}(r) = \sqrt{\frac{2\pi k}{r}} J_{l+1/2}(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi); \quad E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}.$

$J_{l+1/2}(kr)$  – функции Бесселя полуцелого аргумента,  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  – сферические функции.

**Задача 3.** Определить уровни энергии для движения частицы в поле сферически симметричной прямоугольной яме конечной глубины

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & r < a; \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Рассмотреть сначала случай  $l = 0$  (ЛЛ § 33(1)), а затем,  $l \neq 0$  (Флюгге 3. Задачи по квантовой механике. Т.1. стр. 168, задача 63).

**Домашнее задание** ЛЛ § 36(1,2)

**Задача 1.** Определить распределение вероятностей различных значений импульса в основном состоянии атома водорода. (ЛЛ § 36(1))

**Задача 2.** Определить средний потенциал поля, создаваемого ядром и электроном в основном состоянии атома водорода. (ЛЛ § 36(2))

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981; ЛЛ – Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика

*Доп.лит:* Флюгге 3. Задачи по квантовой механике. Т.1, Т.2. 1974