

Квантова механіка. Фізичний факультет, 4 курс, 7 семестр.

Заняття №11. Рух в центральному полі: сферичні хвилі, частинка в сферично симетричній прямокутній ямі скінченої глибини

1. Перевірка д/з.

**Задача 1.** Знайти  $\langle r^{-1} \rangle$  в стані, що описується хвильовою функцією  $\psi(r, \theta, \varphi) = Ae^{-r}$ . Чому дорівнює в цьому стані  $\langle \hat{L}^2 \rangle$  та  $\langle \hat{L}_z \rangle$ ?

2. Гамільтоніан частинки, котра рухається в центральному полі

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi} \right] + U(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 \hat{l}^2}{2\mu r^2} + U(r);$$
$$\Delta_{\theta\varphi} = \left[ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] = -\hat{l}^2.$$

**Задача 2.** Дослідити стаціонарні стани вільної частинки з певною енергією, певним моментом  $l$  та його проекцією  $m$  (сферичні хвилі). (див. ЛЛ § 33)

Комутаційні співвідношення для  $\hat{H}, \hat{l}^2, \hat{l}_z$ :

$$\left[ \hat{H}, \hat{l}^2 \right] = 0, \quad \left[ \hat{H}, \hat{l}_z \right] = 0, \quad \left[ \hat{l}^2, \hat{l}_z \right] = 0.$$

Поділ змінних:  $\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$ .

Рівняння для радіальної частини хвильової функції  $R(r)$  при  $U(r) = 0$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} R(r) = ER(r).$$

Важливі співвідношення:  $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR}{dr} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} (rR) = \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr}$

Заміна:

$$R(r) = \frac{\chi(r)}{\sqrt{r}}; \quad R'(r) = \frac{\chi'(r)}{\sqrt{r}} - \frac{1}{2} \frac{\chi(r)}{r\sqrt{r}}; \quad R''(r) = \frac{\chi''(r)}{\sqrt{r}} - \frac{\chi'(r)}{r\sqrt{r}} + \frac{3}{4} \frac{\chi(r)}{r^2\sqrt{r}}.$$

Розв'язок:  $\psi_{klm}(r) = \sqrt{\frac{2\pi k}{r}} J_{l+1/2}(kr) Y_{lm}(\theta, \varphi); \quad E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu}.$

$J_{l+1/2}(kr)$  – функції Бесселя напівцілого аргументу,  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  – сферичні функції.

**Задача 3.** Визначити рівні енергії для руху частинки в полі сферично симетричної прямокутної ями скінченної глибини

$$U(r) = \begin{cases} -U_0, & r < a; \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Розглянути спочатку випадок  $l = 0$  (ЛЛ § 33(1)), а потім,  $l \neq 0$  (Флюгге 3. Задачі з квантової механіки. Т.1. стор. 168, задача 63).

3. Самостійна робота (~ 20 хвилин). Робота складається з двох завдань, максимальна оцінка – **5 балів**

**Домашнє завдання** ЛЛ § 36(1,2)

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981; ЛЛ – Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика

**Дод.літ:** Флюгге 3. Задачи по квантовой механике. Т.1, Т.2. 1974