

Квантова механіка. Фізичний факультет, 4 курс, 7 семестр.

Заняття №10. Рух в центральному полі: задача двох тіл в квантовій механіці, плоский ротатор, просторовий ротатор.

1. Перевірка д/з.

Задачі 1-2. Обчислити комутатори $[L_x^2, y^2]$, $[l_+, l_-]$

Задача 3. Знайти середнє значення $\langle \hat{l}_x \hat{l}_z \rangle$ в стані, який описується хвильовою функцією ψ_m з певним значенням проекції кутового моменту m на вісь z .

2. Задача двох тіл

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} + U(|\hat{r}_1 - \hat{r}_2|)$$

в квантовій механіці, як і в класичній механіці, зводиться до задачі про рух у центральному полі

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2(m_1 + m_2)} \Delta_R - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_r + U(r), \text{ де}$$

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \text{ – радіус-вектор центру інерції двох частинок}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \text{ – радіус-вектор відносного руху двох частинок.}$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \text{ – приведена маса двох частинок.}$$

$$\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rightarrow \psi(\vec{R}, \vec{r}) = \psi(\vec{R})\psi(\vec{r}), \quad \psi(\vec{R}) = \exp(i\vec{K}\vec{R}).$$

2.1. Гамільтоніан частинки, яка рухається в центральному полі

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi} \right] + U(r) = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\hbar^2 \hat{l}^2}{2\mu r^2} + U(r);$$

$$\Delta_{\theta\varphi} = \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right] = -\hat{l}^2.$$

Комутаційні співвідношення для $\hat{H}, \hat{l}^2, \hat{l}_z$:

$$\left[\hat{H}, \hat{l}^2 \right] = 0, \quad \left[\hat{H}, \hat{l}_z \right] = 0, \quad \left[\hat{l}^2, \hat{l}_z \right] = 0.$$

Поділ змінних: $\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

2.2. Рівняння для радіальної частини хвильової функції $R(r)$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + U_{eff.}(r)R(r) = ER(r);$$

$$U_{eff.} = U(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2}.$$

Задача 4. Знайти рівні енергії та нормовані хвильові функції плоского ротатора з

гамільтоніаном $\hat{H} = \frac{\hbar^2 \hat{l}_z^2}{2I}$, $I = \mu a^2$. (ГКК № 4.1)

Задача 5. Знайти рівні енергії та нормовані хвильові функції просторового ротатора з

гамільтоніаном $\hat{H} = \frac{\hbar^2 \hat{l}^2}{2I}$, $I = \mu a^2$. (ГКК № 4.3)

Домашнє завдання ГКК № 3.37, 4.28, 4.33.

ГКК - Галицкий Е.М., Карнаков Б.М., Коган В.И. Задачи по квантовой механике, 1981; Гр. - Гречко Л.Г., Сугаков В.И., Томасевич О.Ф., Федорченко А.М. Сборник задач по теоретической физике, 1984